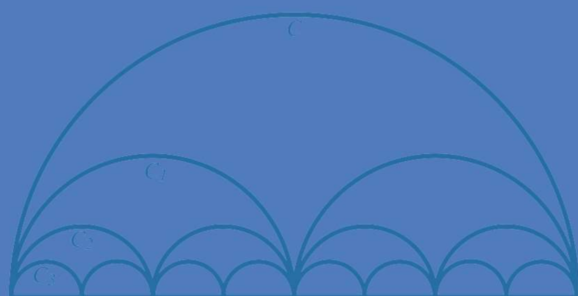
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Bài tập ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NÂNG CAO







NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN LIÊM – NGUYỄN KHẮC MINH – ĐOÀN QUỲNH
NGÔ XUÂN SƠN – ĐẶNG HÙNG THẮNG – LƯU XUÂN TÌNH

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ chín)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01-2016/CXBIPH/805-964/GD

Mã số : NB103n6

CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Tập xác định của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của chúng là $[-1 ; 1]$.

   Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, của hàm số $y = \cot x$ là $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị của chúng là $\mathbb{R}$.

2) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

3) Hàm số $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho :

   $\forall x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D}, x - T \in \mathcal{D}$ và $f(x + T) = f(x)$.

   Số T dương nhỏ nhất thoả mãn điều kiện đó là chu kì của hàm số f.

   Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

   Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

II – CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.

1) *Công thức lượng giác cơ bản*

   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

   $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2) *Công thức cộng*

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

3) *Công thức nhân đôi*

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

4) *Công thức hạ bậc*

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

5) *Công thức biến đổi tích thành tổng*

$\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$;

$\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$;

$\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

6) *Công thức biến đổi tổng thành tích*

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

7) *Đưa biểu thức* $a\sin x + b\cos x$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ *về dạng* $C\sin(x+\alpha)$:

$C = \sqrt{a^2+b^2}$, α là số sao cho $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

III – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

• Các phương trình $\sin x = m$ và $\cos x = m$ vô nghiệm khi $|m| > 1$ và có vô số nghiệm khi $|m| \le 1$.

• $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$

với $|m| \le 1$ và $\sin\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \arcsin m$).

• $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$

với $|m| \le 1$ và $\cos\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \arccos m$).

• $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, với $\tan\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \arctan m$).

• $\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, với $\cot\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \text{arccot}\, m$).

IV – CÁCH GIẢI MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

Dạng của phương trình	Cách giải
Phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với $f(x)$, trong đó $f(x)$ là một biểu thức lượng giác nào đó.	Đặt ẩn phụ $t = f(x)$.
Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin x + b\cos x = c$ $(a^2 + b^2 \ne 0)$.	Biến đổi vế trái về dạng $C\sin(x + \alpha)$ hoặc $C\cos(x + \beta)$.
Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$. $(a^2 + b^2 + c^2 \ne 0)$	Chia hai vế cho $\cos^2 x$ (với $\cos x \ne 0$) hoặc chia hai vế cho $\sin^2 x$ (với $\sin x \ne 0$).
Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$. $(a^2 + b^2 + c^2 \ne 0)$	Viết $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi đưa về dạng phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$.

B – ĐỀ BÀI

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.1. Chọn phương án đúng trong bốn phương án đã cho trong mỗi câu sau :

a) Hàm số $y = \tan(\frac{\pi}{2}\cos x)$ chỉ không xác định tại :

(A) $x = 0$; (B) $x = 0$ và $x = \pi$;

(C) $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$ chỉ xác định khi :

(A) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (B) $x = 0$;

(C) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (D) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ là :

(A) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (B) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

(C) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; (D) $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

a) Hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$;

b) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; 0]$;

c) Hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{3}]$.

1.3. Giả sử trên khoảng J, hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ có dấu không đổi. Chứng minh :

a) Nếu trên J, hai hàm số đó cùng dấu thì hàm số này đồng biến khi và chỉ khi hàm số kia nghịch biến ;

b) Nếu trên J hai hàm số đó khác dấu thì hai hàm số đó hoặc cùng đồng biến hoặc cùng nghịch biến.

1.4. Lập bảng biến thiên của

a) Các hàm số $y = -\sin x$, $y = \cos x - 1$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$;

b) Hàm số $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ trên đoạn $[-\frac{4\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}]$;

c) Hàm số $y = -\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ trên đoạn $[-\frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}]$.

1.5. Chứng minh rằng số T thoả mãn $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra số T dương nhỏ nhất thoả mãn $\sin(x + T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là 2π (tức là hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π).

1.6. Từ tính chất của hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, hãy chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$;

b) Hàm số $y = A\cos(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

1.7. Chứng minh rằng các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số :

a) $y = \sin^2 2x + 1$; b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

1.8. Chứng minh rằng số π là số dương T nhỏ nhất thoả mãn điều kiện : Với mọi $x \in \mathcal{D}_1 \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ta có $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + \pi) = \tan x$ (tức là hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π).

1.9. Từ tính chất hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π, hãy chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = A\tan\omega x + B$ (A, B, ω là những hằng số, $A\omega \neq 0$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{|\omega|}$;

b) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.10. Chứng minh rằng các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn – lẻ của mỗi hàm số :

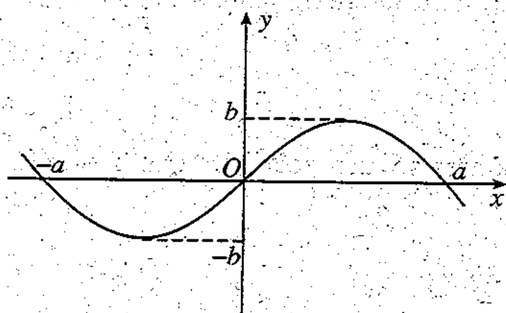
a) $y = \frac{1}{\sin x}$; b) $y = \frac{1}{\cos x}$; c) $y = \tan^2 x$.

1.11. Xét hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ (A, B, ω, α là những hằng số, $A\omega \neq 0$). Chứng minh :

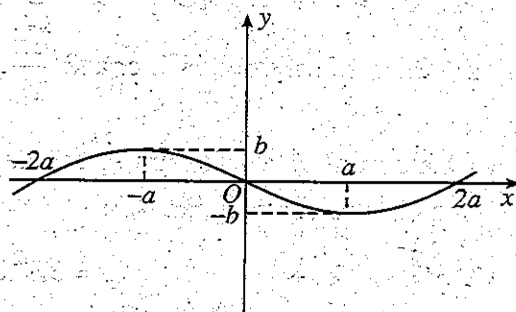
a) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số theo thứ tự là $|A| + B$; $-|A| + B$;

b) Khi $A > 0$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k\frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

1.12. Cho biết rằng mỗi đồ thị sau (h.1.1, h.1.2) là đồ thị của hàm số có dạng $y = A\sin\omega x$ (A, ω là những hằng số). Hãy xác định A, ω cho mỗi hàm số.



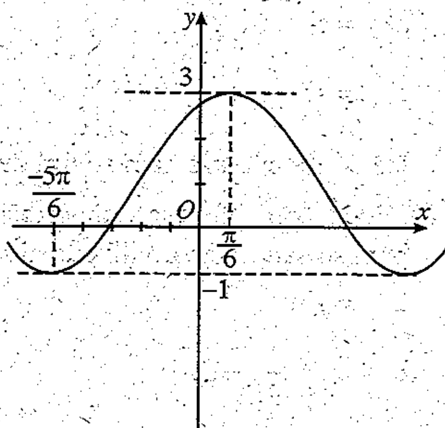
Hình 1.1



Hình 1.2

1.13. Cho biết đồ thị (h.1.3) sau là đồ thị hàm số

$y = A\sin(x + \alpha) + B$ (A, B, α là những hằng số). Hãy xác định A, B, α.



Hình 1.3

1.14. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mọi khoảng $(a\,;\,b)$ nằm trong tập xác định $\mathcal{D}_1$ của nó.

b) Có phải trên bất cứ khoảng nào hàm số $y = \tan x$ đồng biến thì hàm số $y = \cot x$ nghịch biến ?

1.15. Chứng minh :

a) Điểm có toạ độ $(k\pi\,;\,0)$ (k là một số nguyên) là tâm đối xứng của đồ thị của hàm số $y = \sin x$;

b) Điểm có toạ độ $(\frac{k\pi}{2}; 0)$ (k là một số nguyên) là tâm đối xứng của đồ thị của hàm số $y = \tan x$;

c) Đường thẳng có phương trình $x = k\pi$ (k là một số nguyên) là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = \cos x$.

1.16. Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 2\tan x$;

b) $y = \tan 2x$;

c) $y = \tan\frac{x}{2}$.

Vẽ đồ thị của các hàm số đó.

1.17. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(\frac{\pi}{4}\,;1)$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$;

b) $y = \cos 2x - 1$;

c) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$;

d) $y = \cos|x| - 1$.

1.18. Phép đối xứng qua điểm $I(\frac{\pi}{2}; 0)$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos 2x$;

c) $y = \sin\dfrac{x}{2}$.

Vẽ đồ thị của các hàm số tìm được.

1.19. Phép đối xứng qua đường thẳng có phương trình $y = 1$ biến đồ thị của mỗi hàm số sau thành đồ thị của hàm số nào ?

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x + 1$;

c) $y = \sin\dfrac{x}{2} + 2$.

Vẽ đồ thị của các hàm số tìm được.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1.20. Giải các phương trình sau :

a) $\sin(3x - \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin(3x - 2) = -1$;

c) $\sqrt{2}\cos(2x - \dfrac{\pi}{5}) = 1$; d) $\cos(3x - 15^\circ) = \cos 150^\circ$;

e) $\tan(2x + 3) = \tan\dfrac{\pi}{3}$; f) $\cot(45^\circ - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1.21. Giải các phương trình sau bằng cách dùng công thức biến đổi tổng thành tích :

a) $\sin 3x - \cos 2x = 0$; b) $\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x$;

c) $\sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; d) $\cos\dfrac{x}{2} = -\cos(2x - 30^\circ)$.

1.22. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{3\sin 2x + \cos x}{\cos\left(4x + \dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

1.23. Tính giá trị gần đúng (chính xác đến hàng phần trăm) nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho :

a) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{5}$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ trong khoảng $(2\pi ; 4\pi)$;

c) $\tan\frac{3x-\pi}{5}=-3$ với $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6}$.

1.24. Biểu diễn nghiệm của mỗi phương trình sau trên đường tròn lượng giác.

a) $\cos 2x=\cos x$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.25. Giải các phương trình sau :

a) $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$;

b) $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$;

c) $\cos 2x-5\sin x-3=0$;

d) $\cos 2x+\cos x+1=0$;

e) $6\sin^2 3x+\cos 12x=14$;

f) $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

1.26. Giải các phương trình sau :

a) $3\cot^2\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=1$;

b) $\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=3$;

c) $7\tan x-4\cot x=12$;

d) $\cot^2 x+(\sqrt{3}-1)\cot x-\sqrt{3}=0$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

1.27. Chọn phương án đúng trong bốn phương án đã cho trong mỗi câu sau :

a) $\sqrt{3}\sin 15^\circ+\cos 15^\circ-\sqrt{2}$ bằng :

(A) $\sqrt{3}$;

(B) $\sqrt{2}$;

(C) 1 ;

(D) 0.

b) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{9}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{9}}$ bằng :

(A) $\sqrt{3}$;

(B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

(C) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$;

(D) $-2\sqrt{3}$.

1.28. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau :

a) $y = (2 - \sqrt{3})\sin 2x + \cos 2x$;

b) $y = (\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 3\sin x\cos x$;

c) $y = (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x) - 1$.

1.29. Một cách trình bày việc đưa biểu thức $a\sin x + b\cos x$ (a, b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) về dạng $C\sin(x + \alpha)$ nhờ biểu thức toạ độ của tích vô hướng của hai vectơ :

Trong mặt phẳng toạ độ gắn với đường tròn lượng giác tâm O gốc A, hãy xét các điểm $P(a ; b)$, $Q(b ; a)$, $M(\cos x ; \sin x)$.

a) Từ các công thức $\overline{OQ}.\overline{OM} = a\sin x + b\cos x$ và

$$\overline{OQ}.\overline{OM} = \left|\overline{OQ}\right|.\left|\overline{OM}\right|\cos(OQ, OM),$$

hãy suy ra $a\sin x + b\cos x = C\cos(x - \beta)$, trong đó $C = \left|\overline{OQ}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$, β là số đo của góc lượng giác (OA, OQ) ;

b) Từ câu a) suy ra rằng $a\sin x + b\cos x = C\sin(x + \alpha)$ trong đó α là số đo của góc lượng giác (OA, OP), $C = \left|\overline{OP}\right|$.

1.30. a) Biết $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$ hãy đưa biểu thức $\sin x + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\cos x$ về dạng $C\sin(x + \alpha)$.

b) Dùng máy tính cầm tay tính gần đúng C và α nói trên.

1.31. a) Từ khẳng định "khi x thay đổi , hàm số $y = \sin x$ nhận mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $[-1 ; 1]$", hãy chứng minh rằng : khi x thay đổi, hàm số

$y = a\sin x + b\cos x$ (a, b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) lấy mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $[-\sqrt{a^2+b^2}\,;\sqrt{a^2+b^2}\,]$.

b) Xét hàm số $y = \dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$. Viết đẳng thức đó thành

$(y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -3y - 1$, để suy ra rằng khi x thay đổi, hàm số trên lấy mọi giá trị y tuỳ ý thoả mãn điều kiện

$$(y-1)^2 + (y+1)^2 \geq (3y+1)^2.$$

Từ đó hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$.

1.32. Giải các phương trình sau :

a) $4\sin x - 3\cos x = 5$;

b) $3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = \dfrac{9}{2}$;

c) $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$;

d) $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 14x$.

1.33. Tìm các giá trị x thuộc $\left(-\dfrac{3\pi}{4}\,;\pi\right)$ thoả mãn phương trình sau với mọi m :

$$m^2\sin x - m\sin^2 x - m^2\cos x + m\cos^2 x = \cos x - \sin x.$$

1.34. Tìm các giá trị α để :

a) Phương trình

$(\cos\alpha + 3\sin\alpha - \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha - 2)x + \sin\alpha - \cos\alpha + \sqrt{3} = 0$

có nghiệm $x = 1$;

b) Phương trình

$(2\sin\alpha - \cos^2\alpha + 1)x^2 - (\sqrt{3}\sin\alpha)x + 2\cos^2\alpha - (3 - \sqrt{3})\sin\alpha = 0$

có nghiệm $x = \sqrt{3}$.

1.35. Giải phương trình $12\cos x + 5\sin x + \dfrac{5}{12\cos x + 5\sin x + 14} + 8 = 0.$

PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

1.36. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$; b) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;

c) $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$; d) $2\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 2$;

e) $4\sin x\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1$.

1.37. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$;

b) $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$.

1.38. Số đo độ của một trong các góc của tam giác vuông *ABC* là nghiệm của phương trình

$$\sin^3 x + \sin x\sin 2x - 3\cos^3 x = 0.$$

Chứng minh rằng *ABC* là tam giác vuông cân.

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

1.39. Dùng công thức biến đổi tích thành tổng để giải các phương trình sau :

a) $\sin x\sin 7x = \sin 3x\sin 5x$;

b) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$;

c) $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$;

d) $\sin 4x\sin 5x + \sin 4x\sin 3x - \sin 2x\sin x = 0$.

1.40. Dùng công thức biến đổi tổng thành tích để giải các phương trình sau :

a) $\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x$; b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

c) $\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$; d) $\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$.

1.41. Dùng công thức hạ bậc để giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$; b) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$;

c) $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x$; d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

e) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$; *f*) $8\cos^4 x = 1 + \cos 4x$;

g) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$; h) $3\cos^2 2x - 3\sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

1.42. Giải các phương trình sau :

a) $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=0$; b) $\tan\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)+\cot\left(4x+\frac{7\pi}{8}\right)=0$;

c) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=1$; d) $\sin 2x+2\cot x=3$.

1.43. Giải các phương trình sau :

a) $\tan x=1-\cos 2x$; b) $\tan(x-15^\circ)\cot(x+15^\circ)=\frac{1}{3}$;

c) $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$; d) $3\sin^4 x+5\cos^4 x-3=0$;

e) $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$; *f*) $1+\sin x\cos 2x=\sin x+\cos 2x$;

g) $\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x-\sin 2x=1+\tan x+\cot x$.

1.44. Giải các phương trình sau :

a) $\tan\frac{x}{2}\cos x-\sin 2x=0$; b) $\sin^6 x+3\sin^2 x\cos x+\cos^6 x=1$;

c) $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}$; d) $\sin^2 x+\sin x\cos 4x+\cos^2 4x=\frac{3}{4}$

1.45. Tìm các nghiệm của phương trình sau trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$ rồi tìm giá trị gần đúng của chúng, chính xác đến hàng phần trăm :

$$\cos x+\sin x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{10}{3}$$

1.46. Biết rằng các số đo rađian của ba góc của tam giác ABC là nghiệm của phương trình $\tan x-\tan\frac{x}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

1.47. Cho phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$.

a) Giải phương trình với $m=\frac{3}{2}$;

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

1.48. Giải phương trình $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$.

1.49. Hãy xác định các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{12}\right)$

$\cos 4x = \cos^2 3x + m\sin^2 x$.

1.50. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng $(0 ; 2\pi)$:

a) $\dfrac{|\sin x|}{\sin x} = \cos x - \dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Đối với các bài từ 1.51 đến 1.57, hãy tìm phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.

1.51. Cho biết mỗi đồ thị sau là đồ thị hàm số có dạng

$$y = A\cos(x + \alpha) + B \quad (A, B, \alpha \text{ là những hằng số}).$$

Hãy chọn câu trả lời đúng.

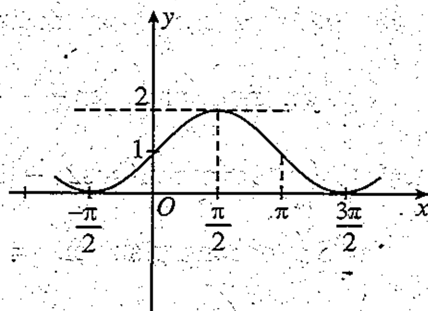
a) Đồ thị ở hình 1.4 là đồ thị của hàm số

(A) $y = \cos x$;

(B) $y = 2\cos x - 1$;

(C) $y = 2\cos x + 1$;

(D) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1$.



Hình 1.4

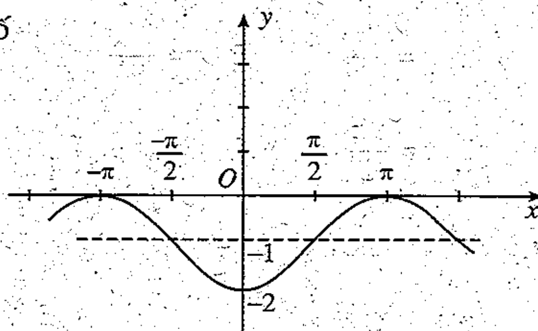
b) Đồ thị ở hình 1.5 là đồ thị hàm số

(A) $y = -2\cos x$;

(B) $y = -\cos x - 1$;

(C) $y = -\cos(x - \pi) - 1$;

(D) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$.



Hình 1.5

1.52. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

(A) $(-6\pi ; -5\pi)$;
(B) $\left(\frac{19\pi}{2} ; 10\pi\right)$;

(C) $\left(-\frac{7\pi}{2} ; -3\pi\right)$;
(D) $\left(7\pi ; \frac{15\pi}{2}\right)$.

1.53. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng

(A) $\left(\frac{19\pi}{2} ; 10\pi\right)$;
(B) $\left(-\frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$;

(C) $\left(\frac{11\pi}{2} ; 7\pi\right)$;
(D) $\left(-\frac{11\pi}{2} ; -5\pi\right)$.

1.54. Nếu $P = \dfrac{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 35^\circ \cos 5^\circ - \sin 35^\circ \sin 5^\circ}$ thì

(A) $P = 2\cos 40^\circ$;
(B) $P = 1$;

(C) $P = \sqrt{3}$;
(D) $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.55. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Khi đó

(A) $240^\circ \in X$;
(B) $290^\circ \in X$;

(C) $220^\circ \in X$;
(D) $200^\circ \in X$.

1.56. Xét phương trình $\tan\frac{\pi}{15}\cos x + \sin x = 1$. Trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{2} ; 4\pi\right)$, một trong các nghiệm của phương trình là :

(A) $x = \frac{7\pi}{2}$; (B) $x = \frac{71\pi}{30}$;

(C) $x = \frac{9\pi}{2}$; (D) Phương trình không có nghiệm trong khoảng đang xét.

1.57. Trong khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $\sin^2 4x + 3\sin 4x \cos 4x - 4\cos^2 4x = 0$ có :

(A) 1 nghiệm ; (B) 2 nghiệm ;

(C) 3 nghiệm ; (D) 4 nghiệm.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TỰ LUẬN

1.58. Trên những khoảng nào thì hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

a) Cùng đồng biến ?

b) Cùng nghịch biến ?

1.59. Cho hàm số $f(x) = \tan(\pi x)$.

a) Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$;

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên k, ta có $f(x + k) = f(x)$. Từ đó suy ra $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 1$;

c) Cho biết sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2}+k ; \frac{1}{2}+k\right), k \in \mathbb{Z}$;

d) Vẽ đồ thị của hàm số đó.

1.60. Chứng minh rằng

$$\cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2\cos(x - a)\sin(x - b)\sin(a - b) = \cos^2(a - b).$$

1.61. Giải các phương trình sau :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $6\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$;

c) $2\cos^2 x - \sin^2 x - 4\cos x + 2 = 0$; d) $9\sin^2 x - 5\cos^2 x - 5\sin x + 4 = 0$;

e) $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$;

f) $3\cos 2x + 2(1 + \sqrt{2} + \sin x)\sin x - 3 - \sqrt{2} = 0$.

1.62. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $[0 ; 2\pi]$ của phương trình

$$\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{15\pi}{2}\right)=1+2\sin x.$$

Tính giá trị gần đúng, chính xác đến hàng phần trăm của các nghiệm đó.

1.63. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$;

b) $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$;

c) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$;

d) $4\sqrt{3}\sin x\cos x+4\cos^2 x-2\sin^2 x=\frac{5}{2}$

1.64. Giải các phương trình sau :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\cot 3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$;

b) $\tan^2 x+\cos 4x=0$;

c) $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$;

d) $\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}+\cos^2 x-\cos^4 x$;

e) $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$;

f) $\sqrt{2}\sin^3(x+\frac{\pi}{4})=2\sin x.$

1.65. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$;

b) $\tan^2 x(1-\sin^3 x)+\cos^3 x-1=0$;

c) $1+\cot 2x=\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$;

d) $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$

1.66. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(0 ; 2\pi)$ của phương trình

$$\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}=4\sin x.$$

1.67. Cho phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$

a) Giải phương trình khi $m=\frac{1}{2}$;

b) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm.

C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

1.1. a) (Đ).

b) (Đ).

c) (Đ).

1.2. a) 1 ; 0.

b) 0 ; –1.

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; –1.

1.3. Kí hiệu một trong hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $y = f(x)$ và hàm số kia là $y = g(x)$. Theo giả thiết thì f và g giữ dấu không đổi trên J.

a) Do $g^2 = 1 - f^2$, nên nếu f^2 đồng biến (nghịch biến) trên J thì g^2 nghịch biến (đồng biến) trên J.

Giả sử $f > 0$ trên J :

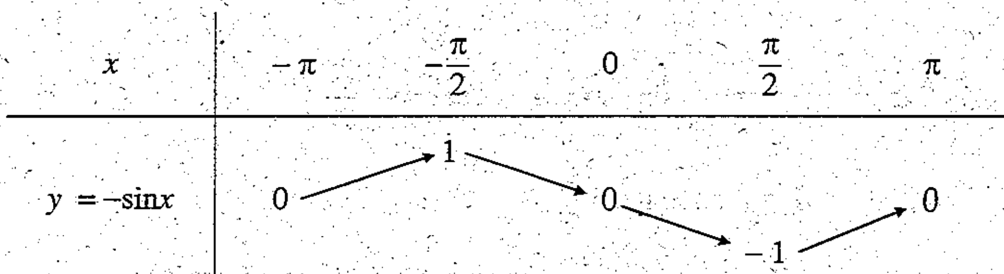
– Nếu f đồng biến trên J thì f^2 đồng biến từ đó g^2 nghịch biến ; Vậy khi đó, nếu $g > 0$ thì g nghịch biến, nếu $g < 0$ thì g đồng biến.

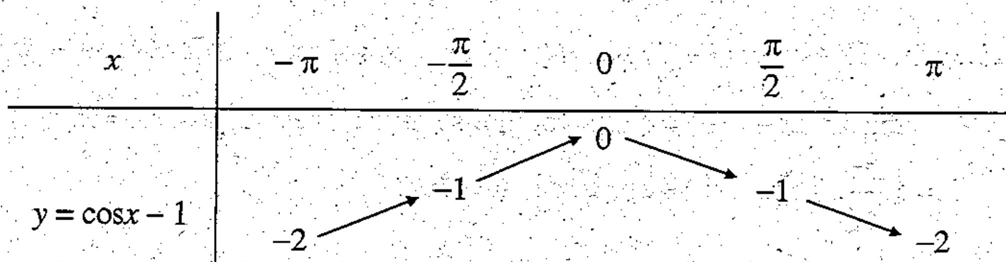
– Nếu f nghịch biến trên J thì f^2 nghịch biến từ đó g^2 đồng biến ; Vậy khi đó, nếu $g > 0$ thì g đồng biến, nếu $g < 0$ thì g nghịch biến.

Xét tương tự trong trường hợp $f < 0$ trên J, ta thấy các khẳng định a), của bài toán đều đúng.

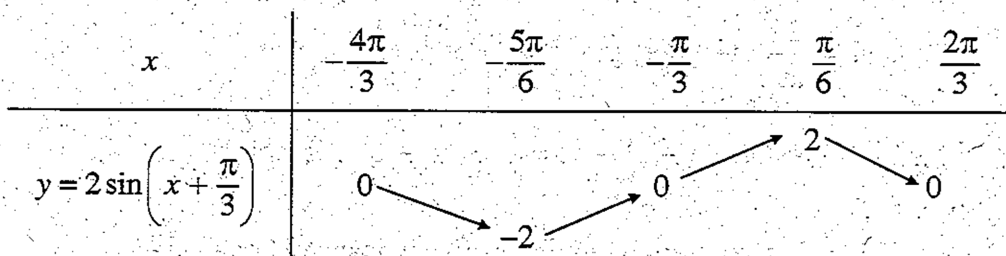
b) Chứng minh tương tự câu a)

1.4. a)

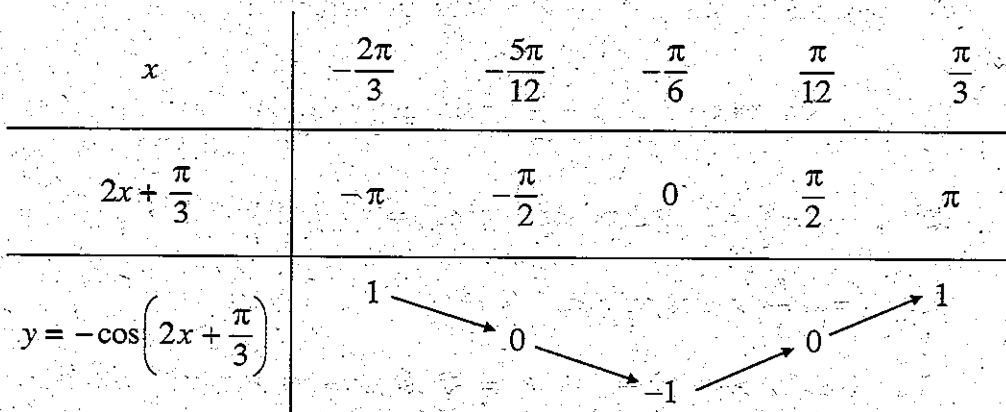




b)



c)



1.5. Nếu $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi x, thì khi $x=\dfrac{\pi}{2}$ ta được $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=1$. Số U mà $\sin U=1$ phải có dạng $U=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, k là số nguyên nào đó, nên

$$\frac{\pi}{2}+T=\frac{\pi}{2}+k2\pi.$$

Vậy $T=k2\pi$.

Ngược lại, dễ thấy rằng với mọi số nguyên k thì $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với mọi x.

1.6. a) Giả sử $A\sin(\omega(x+T)+\alpha) = A\sin(\omega x+\alpha)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\omega x+\alpha = u$, ta được $\sin(u+\omega T) = \sin u$, với mọi số thực u. Vậy suy ra $\omega T = k2\pi$, tức là $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k nguyên. Ngược lại dễ thấy rằng

$$A\sin\left(\omega\left(x+k\frac{2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right) = A\sin(\omega x+\alpha+k2\pi) = A\sin(\omega x+\alpha).$$

Vậy số $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$ là số dương bé nhất thoả mãn

$$A\sin(\omega(x+T)+\alpha) = A\sin(\omega x+\alpha) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

(tức là $y = A\sin(\omega x+\alpha)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$).

b) T là số mà $A\cos(\omega(x+T)+\alpha) = A\cos(\omega x+\alpha)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\sin\left(\omega(x+T)+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega x+\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Đặt $\omega x+\alpha+\dfrac{\pi}{2} = u$, ta được $\sin(u+\omega T) = \sin u$ với mọi u, từ đó $\omega T = k2\pi$ tức là $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k là số nguyên.

(*Cách khác.* $A\cos(\omega(x+T)+\alpha) = A\cos(\omega x+\alpha)$ với mọi x, thì khi lấy $x = -\dfrac{\alpha}{\omega}$, ta có $\cos\omega T = \cos 0 = 1$, từ đó $\omega T = k2\pi$, tức $T = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, k là số nguyên).

Từ đó dễ thấy rằng $y = A\cos(\omega x+\alpha)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

1.7. a) $y = \sin^2 2x + 1 = \dfrac{1-\cos 4x}{2}+1 = \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 4x$. Từ bài tập 1.6 b) dễ thấy hàm số này là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\dfrac{\pi}{2}$. Đó là một hàm số chẵn.

b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, đó là một hàm số tuần hoàn với chu kì π. Nó là một hàm số chẵn.

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, với mọi x nên y là một hàm hằng, do đó với mọi số T ta có $\cos^2(x + T) + \sin^2(x + T) = \cos^2 x + \sin^2 x$ với mọi x, đó là một hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kì (trong các số T dương không có số T nhỏ nhất). Hàm hằng là một hàm số chẵn.

1.8. T là số thoả mãn $\forall x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + T) = \tan x$.

Với $x = 0$ ta được $\tan T = \tan 0 = 0$, suy ra $T = k\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k\pi$ thoả mãn $\forall x \in \mathcal{D}_1$, $x + T \in \mathcal{D}_1$, $x - T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(x + T) = \tan x$. Trong các số $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ số dương nhỏ nhất là π. Vậy hàm số $y = \tan x$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.9. a) Hàm số $y = A\tan\omega x + B$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2\omega} + k\frac{\pi}{\omega} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Cần tìm T để $\forall x \in \mathcal{D}$, $x + T$ và $x - T$ đều thuộc $\mathcal{D}$ và $A\tan\omega(x + T) + B = A\tan\omega x + B$, tức là $\tan(\omega x + \omega T) = \tan\omega x$. Rõ ràng $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \omega x = u \in \mathcal{D}_1$ nên $\tan(u + \omega T) = \tan u$ với mọi $u \in \mathcal{D}_1$ khi và chỉ khi $\omega T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó $T = k\frac{\pi}{\omega}$ và số T dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{\pi}{|\omega|}$.

b) Với mọi $x \in \mathcal{D}_2$, $\cot x = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$, nên $\cot(x + T) = \cot x$, $\forall x \in \mathcal{D}_2$ tương đương với $\tan(u + T) = \tan u$, $\forall u = x + \frac{\pi}{2} \in \mathcal{D}_1$. Từ đó $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vậy số T dương nhỏ nhất cần tìm là π.

1.10. a) $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm số xác định trên $\mathcal{D}_2$. Cần tìm số T thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_2$, $x + T \in \mathcal{D}_2$, $x - T \in \mathcal{D}_2$, $\frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x}$. Xét $x = \frac{\pi}{2} \in \mathcal{D}_2$, ta được $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$, từ đó $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức $T = k2\pi$, k là số nguyên.

Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k2\pi$ thoả mãn : $\forall x \in \mathcal{D}_2, x+T \in \mathcal{D}_2$, $x - T \in \mathcal{D}_2$ và $\frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x}$. Vậy hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Đó là một hàm số lẻ.

b) $y = \frac{1}{\cos x}$ là hàm số xác định trên $\mathcal{D}_1$. Cần tìm số T thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_1, x+T \in \mathcal{D}_1, x-T \in \mathcal{D}_1, \frac{1}{\cos(x+T)} = \frac{1}{\cos x}$. Xét $x = 0 \in \mathcal{D}_1$, ta được $\cos T = 1$, từ đó $T = k2\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k2\pi$ thoả mãn các điều kiện đề ra. Vậy hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Đó là một hàm số chẵn.

c) $y = \tan^2 x$, cần tìm số T thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_1, x+T \in \mathcal{D}_1, x-T \in \mathcal{D}_1, \tan^2(x+T) = \tan^2 x$. Xét $x = 0 \in \mathcal{D}_1$, ta được $\tan^2 T = 0$, từ đó $\tan T = 0$, suy ra $\tan T = k\pi$, k là số nguyên. Rõ ràng với mọi số nguyên k, số $T = k\pi$ thoả mãn :

$\forall x \in \mathcal{D}_1, x+T \in \mathcal{D}_1, x-T \in \mathcal{D}_1$ và $\tan^2(x+T) = \tan^2(x+k\pi) = \tan^2 x$. Vậy hàm số $y = \tan^2 x$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

1.11. a) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin u$ là 1 và -1, nên dễ thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ là $|A| + B$ và $-|A| + B$.

b) Khi $A > 0$, hàm số $y = A\sin(\omega x + \alpha) + B$ đạt giá trị lớn nhất tại x mà $\omega x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, tức là $x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k\frac{2\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.12. a) Hàm số $y = b\sin\frac{\pi}{a}x$ nên $A = b$, $\omega = \frac{\pi}{a}$.

b) Hàm số là $y = -b\sin\frac{\pi}{2a}x$ nên $A = -b$, $\omega = \frac{\pi}{2a}$.

1.13. Hàm số $y = A\sin(x + \alpha) + B$ đạt giá trị lớn nhất là 3 tại $x = \frac{\pi}{6}$ (coi $A > 0$) nên :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = 1, \\ A + B = 3. \end{cases}$$

Hàm số $y = A\sin(x + \alpha) + B$ đạt giá trị nhỏ nhất là -1 tại $x = -\frac{5\pi}{6}$ nên :

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) = -1, \\ -A + B = -1. \end{cases}$$

Từ đó $B = 1, A = 2$ và chú ý rằng

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right),$$

nên chỉ cần chọn α sao cho $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = 1$, chẳng hạn $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $A = 2, B = 1, \alpha = \frac{\pi}{3}$.

1.14. a) Vì $(a ; b) \subset \mathcal{D}_1$ nên không có số $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thuộc $(a ; b)$. Vậy có số nguyên l để $(a ; b) \subset \left(\frac{\pi}{2} + l\pi ; \frac{\pi}{2} + (l+1)\pi\right)$; hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng này nên nó đồng biến trên khoảng $(a ; b)$.

b) Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$, nhưng khoảng này không nằm trong tập xác định $\mathcal{D}_2$ của hàm số $y = \cot x$ nên không thể xét tính nghịch biến của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng đó. (Nếu cả hai hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ cùng xác định trên khoảng J thì dễ thấy $y = \tan x$ đồng biến trên J và hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên J).

1.15. a) Điểm $M'(x' ; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua điểm $(k\pi ; 0)$ khi và chỉ khi

$$\frac{x + x'}{2} = k\pi, \frac{y + y'}{2} = 0, \text{ tức là } \begin{cases} x' = -x + k2\pi \\ y' = y. \end{cases}$$

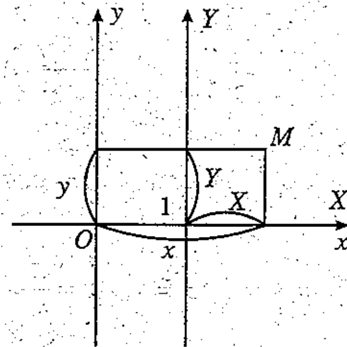
Gọi $\mathscr{C}$ là đồ thị của hàm số $y = \sin x$. $\mathscr{C}$ nhận $(k\pi ; 0)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x ; y)$ thuộc $\mathscr{C}$ (tức là với mọi x, $y = \sin x$) điểm $M'(x' ; y')$ nói trên (tức là $x' = -x + k2\pi$, $y' = -y$) cũng thuộc $\mathscr{C}$; Điều này có nghĩa là $-\sin x = \sin(-x + k2\pi)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng $\sin x = \sin(x - k2\pi)$ do 2π là chu kì của hàm số $y = \sin x$. Vậy điểm $(k\pi ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ là một tâm đối xứng của đồ thị $\mathscr{C}$ của hàm số $y = \sin x$.

Cách chứng minh khác

Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I(k\pi ; 0)$; $x = X + k\pi$; $y = Y$ (phép đổi gốc toạ độ), (h. 1.6) thì đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là đồ thị của hàm số

$$Y = \sin(X + k\pi) = (-1)^k \sin X,$$

trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \sin X$ cũng như hàm số $Y = -\sin X$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I là tâm đối xứng.



Hình 1.6

b) Điểm $M'(x' ; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua điểm $\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$ khi và chỉ khi

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{k\pi}{2}, \frac{y + y'}{2} = 0, \text{ tức là } \begin{cases} x' = -x + k\pi \\ y' = -y. \end{cases}$$

Gọi $\mathscr{C}$ là đồ thị của hàm số $y = \tan x$; $\mathscr{C}$ nhận $\left(\frac{k\pi}{2} ; 0\right)$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x ; y)$ thuộc $\mathscr{C}$ (tức là với mọi $x \in \mathscr{D}_1$, $y = \tan x$) điểm $M'(x' ; y')$ nói trên (tức là $x' = -x + k\pi$, $y' = -y$) cũng thuộc $\mathscr{C}$; điều này

có nghĩa là $-\tan x = \tan(-x + k\pi)$, với mọi $x \in \mathcal{D}_1$. Điều đó đúng do π là chu kì của hàm số $y = \tan x$. Vậy điểm $\left(\frac{k\pi}{2}; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ là một tâm đối xứng của đồ thị $\mathscr{C}$ của hàm số $y = \tan x$.

Cách chứng minh khác

Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I\left(\frac{k\pi}{2}; 0\right)$; $x = X + \frac{k\pi}{2}$; $y = Y$. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là đồ thị của hàm số

$$Y = \tan(X + k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \tan X & \text{nếu } k \text{ chẵn,} \\ -\dfrac{1}{\tan X} & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$$

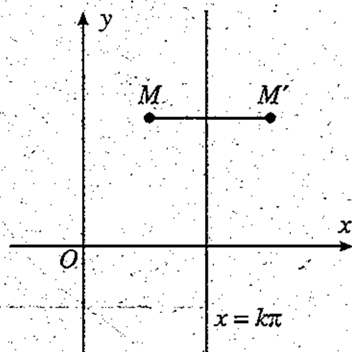
trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \tan X$ cũng như hàm số $Y = -\frac{1}{\tan X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận I là tâm đối xứng.

c) Điểm $M'(x'; y')$ là điểm đối xứng của điểm $M(x; y)$ qua đường thẳng $x = k\pi$ (h.1.7) khi và chỉ khi $\frac{x + x'}{2} = k\pi$, $y = y'$, tức là $\begin{cases} x' = -x + k2\pi \\ y' = y. \end{cases}$

Gọi $\mathscr{C}$ là đồ thị của hàm số $y = \cos x$. $\mathscr{C}$ nhận đường thẳng $x = k\pi$ làm một trục đối xứng khi và chỉ khi : Với mọi điểm $M(x; y)$ thuộc $\mathscr{C}$ (tức là với mọi x, $y = \cos x$) điểm $M'(x'; y')$ nói trên cũng thuộc $\mathscr{C}$. Điều này có nghĩa là

$$\cos x = \cos(-x + k2\pi), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng ta có đẳng thức đó, do 2π là chu kì của hàm số $y = \cos x$. Vậy đường thẳng $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là một trục đối xứng của đồ thị $\mathscr{C}$ của hàm số $y = \cos x$.



Hình 1.7

Cách chứng minh khác

Xét phép đổi trục toạ độ Oxy sang hệ trục toạ độ IXY, với $I(k\pi; 0)$; $x = X + k\pi$; $y = Y$, thì đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trong hệ trục toạ độ Oxy là

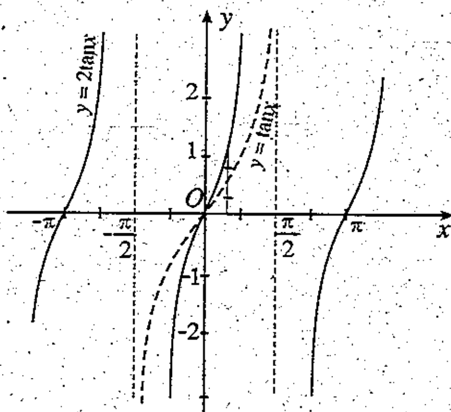
đồ thị của hàm số $Y = \cos(X + k\pi) = (-1)^k \cos X$ trong hệ toạ độ IXY. Vì hàm số $Y = \cos X$ cũng như hàm số $Y = -\cos X$ là các hàm số chẵn nên đồ thị đó nhận trục IY (tức là đường thẳng $x = k\pi$) làm trục đối xứng.

1.16. Gọi $\mathscr{C}$ là đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

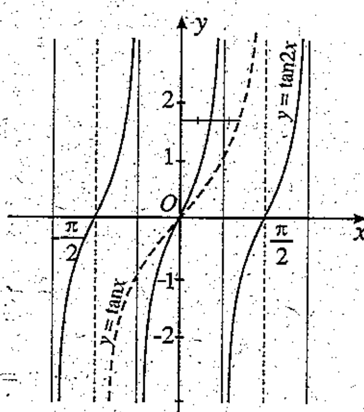
a) Đồ thị của hàm số $y = 2\tan x$ có được từ $\mathscr{C}$ bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x ; y)$ thành điểm $(x ; 2y)$. (h.1.8).

b) Đồ thị của hàm số $y = \tan 2x$ có được bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x ; y)$ thành điểm $(\frac{x}{2} ; y)$. (h.1.9).

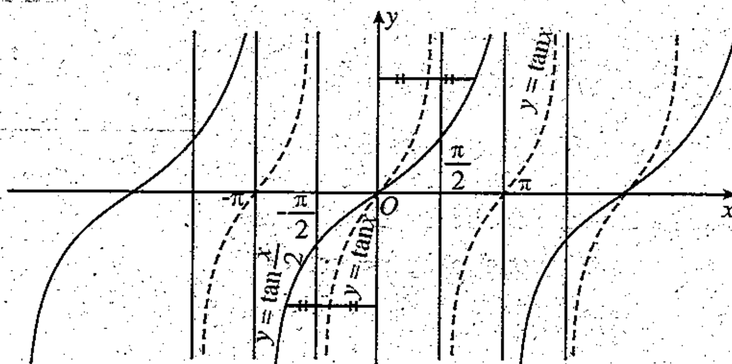
c) Đồ thị của hàm số $y = \tan\frac{x}{2}$ có được bằng phép biến đổi, biến mỗi điểm $(x ; y)$ thành điểm $(2x ; y)$, (h.1.10).



Hình 1.8



Hình 1.9



Hình 1.10

1.17. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4} ; 1\right)$ biến điểm $(x ; y)$ thành điểm $(x' ; y')$

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{\pi}{4}, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

Từ đó nó biến đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thành đồ thị của hàm số $y = f\left(x' - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$.

Vậy ta có :

a) $y = \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) + 1$;

b) $y = \sin 2x$, (do $\cos 2(x - \dfrac{\pi}{4}) = \sin 2x$) ;

c) $y = 2\sin x + 1$; d) $y = \cos\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|$.

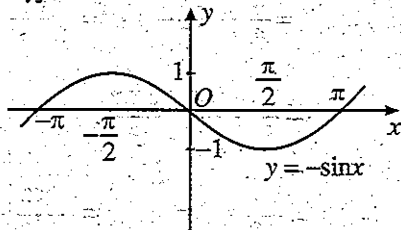
1.18. Điểm đối xứng của điểm $M(x\ ;\ y)$ qua điểm $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ là điểm $M'(x'\ ;\ y')$,

$x' = \pi - x$; $y' = -y$ tức là $x = \pi - x'$; $y = -y'$. Vậy ta có :

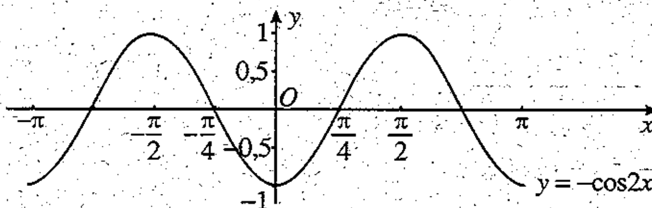
a) $y = -\sin x$ (h.1.11) ;

b) $y = -\cos 2x$ (h.1.12) ;

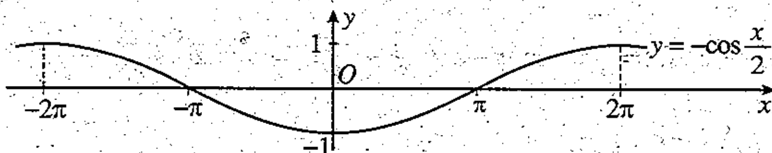
c) $y = -\cos\dfrac{x}{2}$ (h.1.13).



Hình 1.11



Hình 1.12



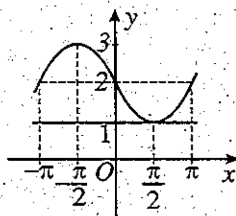
Hình 1.13

1.19. Điểm đối xứng của điểm $M(x ; y)$ qua đường thẳng $y = 1$ là điểm $M'(x' ; y')$: $x' = x$, $y' = 2 - y$, tức là $x = x'$; $y = 2 - y'$. Vậy ta có :

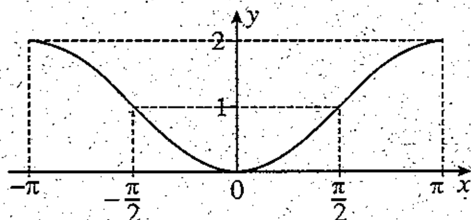
a) $y = 2 - \sin x$ (h.1.14) ;

b) $y = 1 - \cos x$ (h.1.15) ;

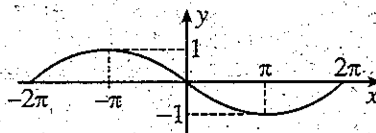
c) $y = -\sin\frac{x}{2}$ (h.1.16).



Hình 1.14



Hình 1.15



Hình 1.16

1.20. a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$; $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$.

b) $x = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

c) $x = \frac{9\pi}{40} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{40} + l\pi$.

d) $x = 55^\circ + k120^\circ$; $x = -45^\circ + k120^\circ$.

e) $x = -\frac{3}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

f) $x = -15^\circ + k180^\circ$.

1.21. a) $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin 3x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

b) $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

c) $x = \frac{25\pi}{72} + \frac{k\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin(3x-\frac{5\pi}{6}) + \cos(3x+\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x-\frac{5\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{4}-3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(3x-\frac{13\pi}{24}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{13\pi}{24}\right) = 0.$$

d) $x = 84^\circ + k144^\circ$; $x = 140^\circ + k240^\circ$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\cos\frac{x}{2} = -\cos(2x-30^\circ) \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} + \cos(2x-30^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{5x}{4}-15^\circ)\cos(15^\circ-\frac{3x}{4}) = 0.$$

1.22. Tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left(\left\{\frac{17\pi}{140}+k\frac{2\pi}{7} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{20}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$.

Giải

Ta có $\cos\left(4x+\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40}\right) = 0.$

- $\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2}+\frac{3\pi}{40} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{140}+k\frac{2\pi}{7}$;
- $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{13\pi}{40} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{20}+k2\pi$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\cos(4x+\frac{2\pi}{5})+\cos(3x-\frac{\pi}{4}) \neq 0$, tức là

$$x \neq \frac{17\pi}{140}+k\frac{2\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z}) \text{ và } x \neq \frac{7\pi}{20}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

1.23. a) $x \approx -0,06$.

Giải. Nếu đặt $y = 2x + \frac{\pi}{6}$ thì $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ và ta có phương trình (với ẩn y) $\sin y = \frac{2}{5}$. Ta biết rằng với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, phương trình này có một nghiệm duy nhất là $y = \arcsin\frac{2}{5}$. Vậy, với điều kiện $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $2x + \frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{2}{5}$, và do đó nó cũng có một nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{2}{5} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Lấy giá trị gần đúng $\arcsin\frac{2}{5} \approx 0,412$ và $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$, ta được $x \approx -0,06$.

(*Chú ý.* Muốn tính gần đúng kết quả cuối cùng chính xác đến hàng phần trăm thì trong các kết quả trung gian ta phải tính chính xác đến hàng phần nghìn).

b) $x \approx 10,41$.

Giải. Nếu đặt $y = \frac{x}{2}$ thì $2\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow \pi < y < 2\pi$ và ta có phương trình $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Do $0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ nên phương trình $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ có duy nhất một nghiệm $y = \alpha$ thuộc khoảng $(\pi ; 2\pi)$ (có thể thấy rõ điều này trên đường tròn lượng giác). Vậy trong khoảng $(2\pi ; 4\pi)$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\frac{x}{2} = \alpha$, và do đó nó có một nghiệm duy nhất $x = 2\alpha$. Để tính giá trị gần đúng của α, ta làm như sau :

Dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta tìm được số β thoả mãn $0 < \beta < \pi$ và $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (cụ thể là $\beta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 1,080$). Khi đó, dễ thấy số $2\pi - \beta$ thoả mãn $\pi < 2\pi - \beta < 2\pi$ và $\cos(2\pi - \beta) = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, nghĩa là $\alpha = 2\pi - \beta$.

Vì $\beta \approx 1,080$ nên giá trị gần đúng nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2\alpha \approx 10,41$.

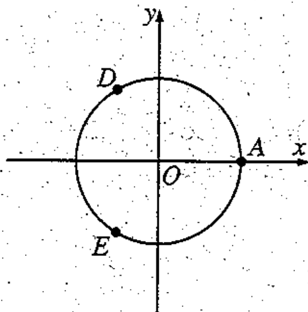
c) $x \approx -1,03$.

Giải. Đặt $y = \frac{3x - \pi}{5}$. Khi đó $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ và phương trình đã cho có dạng $\tan y = -3$. Với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, phương trình này có một nghiệm duy nhất là $y = \arctan(-3)$. Vì $\frac{3x - \pi}{5} = \arctan(-3)$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(5\arctan(-3) + \pi\right)$ nên $x = \frac{1}{3}\left(5\arctan(-3) + \pi\right)$ cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$.

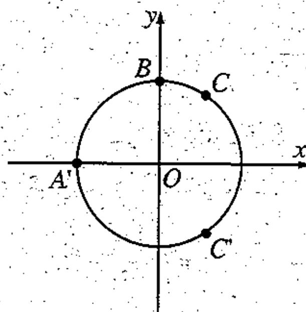
Lấy giá trị gần đúng $\arctan(-3) \approx -1,249$, ta được $x \approx -1,03$.

1.24. a) Nghiệm là $x = \frac{k2\pi}{3}$, chúng được biểu diễn bởi ba điểm A, D, E trên hình 1.17.

b) Nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$, chúng được biểu diễn bởi bốn điểm B, C, A', C' trên hình 1.18.



Hình 1.17



Hình 1.18

1.25. a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho thành $3(1 - \cos^2 2x) + 7\cos 2x - 3 = 0$.

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \alpha + 2k\pi$, $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, trong đó $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho thành $6(1-\sin^2 x)+5\sin x-7=0$.

c) $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\pi+\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$.

d) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

e) Vô nghiệm.

Giải. Ta có $2\sin^2 3x = 1-\cos 6x$ và $\cos 12x = 2\cos^2 6x - 1$. Do đó

$$6\sin^2 3x+\cos 12x = 14 \Leftrightarrow 3(1-\cos 6x)+2\cos^2 6x - 1 = 14$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 6x - 3\cos 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \cos 6x = \frac{3\pm\sqrt{105}}{4}.$$

Dễ thấy $\left|\frac{3\pm\sqrt{105}}{4}\right| > 1$ nên các phương trình này vô nghiệm, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

f) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$ để đưa phương trình đã cho về dạng phương trình trùng phương đối với $\cos x$.

1.26. a) $x=\frac{2\pi}{15}+k\pi,\ x=-\frac{8\pi}{15}+k\pi$.

b) $x=\frac{7\pi}{24}+k\frac{\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}$.

c) $x=\alpha+k\pi$, trong đó $\tan\alpha = 2$ và $x=\beta+k\pi$, trong đó $\tan\beta=-\frac{2}{7}$.

d) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$.

1.27. Bằng cách đưa biểu thức $a\sin x + b\cos x$ về dạng $C\sin(x+\alpha)$ dễ thấy

a) (D) ; b) (C).

1.28. a) Ta có $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, nên giá trị lớn nhất là $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, giá trị nhỏ nhất là $-2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

b) Ta có $y = (\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 3\sin x\cos x = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$.

Để ý rằng $\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$, ta thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $1+\frac{\sqrt{17}}{2}$ và $1-\frac{\sqrt{17}}{2}$.

c) Ta có $y = (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x) - 1 = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) - 3\sin x\cos x - 1$

$= -1 - \frac{3}{2}\sin 2x - 2\cos 2x.$

Để ý rằng $\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$, ta thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $\frac{3}{2}$ và $-\frac{7}{2}$.

1.29. a) Ta có $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OM} = a\sin x + b\cos x$

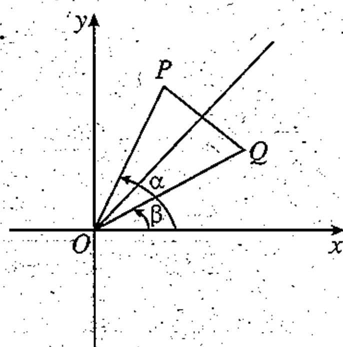
$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|\cos\left(OQ, OM\right) = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos((OA, OM) - (OA, OQ))$

$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos(x - \beta)$, $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\beta = (OA, OQ)$.

b) (h.1.19) Hai điểm $P(a\ ;\ b)$ và $Q(b\ ;\ a)$ đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ, nên dễ thấy

$(OA, OQ) = \frac{\pi}{2} - (OA, OP)$, tức là

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy



Hình 1.19

$a\sin x + b\cos x = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos(x - \beta) = \left|\overrightarrow{OP}\right|\cos(x - \frac{\pi}{2} + \alpha) = \left|\overrightarrow{OP}\right|\sin(x + \alpha).$

1.30. a) Từ $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, ta dễ tính được $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ nên

$$\sin x + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right).$$

b) $C \approx 3{,}236067978$, $\alpha \approx 1{,}256637061\ldots$.

1.31. a) Ta có $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ nên dễ thấy hàm số y nhận mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $[-\sqrt{a^2+b^2}\,;\sqrt{a^2+b^2}\,]$.

b) Do $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ nên $\sin x - \cos x + 3 \neq 0$ với mọi x. Vậy cặp số (x, y) thoả mãn $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$ khi và chỉ khi :

$$(y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -(3y+1).$$

Với mọi giá trị y cho trước, biểu thức ở vế trái của đẳng thức này lấy mọi giá trị tuỳ ý thuộc đoạn $\left[-\sqrt{(y-1)^2+(y+1)^2}\,;\sqrt{(y-1)^2+(y+1)^2}\right]$. Đẳng thức trên cho thấy $-(3y+1)$ phải thuộc đoạn đó, tức là :

$$(3y+1)^2 \leq (y-1)^2 + (y+1)^2.$$

Vậy với mọi y thoả mãn điều kiện này, tồn tại x để

$$(y-1)\sin x - (y+1)\cos x = -(3y+1).$$

Để ý rằng bất đẳng thức trên tương đương với

$$7y^2 + 6y - 1 \leq 0 \text{ tức là } -1 \leq y \leq \frac{1}{7}.$$

Từ đó ta suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là $\frac{1}{7}$ và -1.

c) $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$.

Để ý rằng $|2\cos x - \sin x| \leq \sqrt{5}$, nên $2\cos x - \sin x + 4 \neq 0$ với mọi x. Vậy (x, y) thoả mãn đẳng thức trên khi và chỉ khi $(y+2)\sin x + (1-2y)\cos x = 4y - 3$.

Lập luận tương tự như câu b), hàm số y lấy mọi giá trị sao cho

$$(4y-3)^2 \leq (y+2)^2 + (1-2y)^2.$$

Bất đẳng thức tương đương với $11y^2 - 24y + 4 \le 0$ tức là $\frac{2}{11} \le y \le 2$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y theo thứ tự là 2 và $\frac{2}{11}$.

1.32. a) $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$, với α thoả mãn $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

b) $x = \alpha \pm \beta + k2\pi$ trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$, $\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{1}{7}}$ và $\cos\beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$.

Giải. $3^2 + (2\sqrt{3})^2 = 21$. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{21}$, ta được phương trình

$$\frac{3}{\sqrt{21}}\cos x + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}\sin x = \frac{9}{2\sqrt{21}}.$$

Hiển nhiên có thể chọn được α sao cho $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$ và $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{1}{7}}$,

và chọn được β sao cho $\cos\beta = \frac{9}{2\sqrt{21}}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $\cos(x - \alpha) = \cos\beta$; nó có các nghiệm $x = \alpha \pm \beta + k2\pi$, đó cũng là các nghiệm của phương trình đã cho.

c) $x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Hướng dẫn. Chia hai vế cho $\sqrt{13}$; chọn α thoả mãn $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Bài toán dẫn đến phương trình $\sin(2x + \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

d) $x = \frac{\alpha}{12} + \frac{k\pi}{6}$, $x = \frac{\pi - \alpha}{16} + k\frac{\pi}{8}$, trong đó $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Hướng dẫn. Phương trình được viết thành $\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x = \sin 14x$ hay $\sin(2x + \alpha) = \sin 14x$.

1.33. $x = \frac{\pi}{4}$.

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$(\sin x - \cos x)m^2 + (\cos^2 x - \sin^2 x)m + (\sin x - \cos x) = 0.$$

Để đẳng thức này đúng với mọi m thì ta phải có $\begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \end{cases}$

tức là

$$\sin x - \cos x = 0 \qquad (*).$$

Trong khoảng $(-\frac{3\pi}{4}; \pi)$ có đúng một giá trị $x = \frac{\pi}{4}$ thoả mãn (*).

Kết luận. Trong khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ có đúng một giá trị $x = \frac{\pi}{4}$ thoả mãn phương trình đã cho với mọi $m \in \mathbb{R}$.

1.34. a) $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Giải. $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi (bằng cách thế $x = 1$ vào phương trình) ta có đẳng thức $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 2$ hay $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = 1$. Đẳng thức đó xảy ra khi và chỉ khi $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ hay $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

b) Không có số α nào thoả mãn điều kiện của bài toán.

1.35. $x = \alpha + \pi + k2\pi$, $x = \alpha \pm \arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k2\pi$, trong đó $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ và $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Giải. Đặt $y = 12\cos x + 5\sin x + 14$, ta có phương trình $y + \frac{5}{y} - 6 = 0$. Dễ thấy phương trình này có hai nghiệm là $y = 1$ và $y = 5$. Do đó

$$12\cos x + 5\sin x + \frac{5}{12\cos x + 5\sin x + 14} + 8 = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12\cos x + 5\sin x + 14 = 1 \\ 12\cos x + 5\sin x + 14 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 12\cos x + 5\sin x = -13 & (1) \\ 12\cos x + 5\sin x = -9. & (2) \end{array}\right.$

Chia hai vế của các phương trình (1) và (2) cho $13\left(13 = \sqrt{12^2 + 5^2}\right)$, gọi α là số thoả mãn $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ và $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, ta có :

(1) $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = -1 \Leftrightarrow x - \alpha = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \pi + k2\pi.$

(2) $\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = -\frac{9}{13} \Leftrightarrow x = \alpha \pm \arccos\left(-\frac{9}{13}\right) + k2\pi.$

1.36. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, trong đó $\tan\alpha = 3$.

Hướng dẫn. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ (với $\cos x \neq 0$), ta được phương trình $\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0$.

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, trong đó $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn. Viết lại vế phải của phương trình là $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Hướng dẫn.

Cách 1 : Sử dụng công thức $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ và $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ để đưa về phương trình $2\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 0$ hay $\cos x(\cos x - \sin x) = 0$.

Cách 2 : Dùng công thức $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ để đi đến phương trình

$$\sin 2x + \cos 2x - 1 = 2\cos 2x \text{ hay } \sin 2x - \cos 2x = 1.$$

d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi}{2}$, trong đó $\cot\alpha = -3$.

Hướng dẫn. Viết lại vế phải của phương trình là $2 = 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$, rồi đưa phương trình về dạng $\cos^2 2x + 3\sin 2x\cos 2x = 0$

hay $\cos 2x(\cos 2x + 3\sin 2x) = 0$.

e) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, trong đó $\tan\alpha = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn

Chú ý rằng $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ và $\cos(\pi + x) = -\cos x$, ta được phương trình sau tương đương với phương trình đã cho :

$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$, hay $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

1.37. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Giải

Những giá trị của x mà $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$ nên không là nghiệm của phương trình đã cho. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của nó cho $\cos^3 x$, ta được

$2\tan^3 x + 4 = 3\tan x\,(1 + \tan^2 x)$. Vậy phương trình đã cho tương đương với

$(\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

b) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Do $\cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sin\frac{x}{2}$ và $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos\frac{x}{2}$ nên phương trình đã cho có thể viết thành

$$3\sin^3\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2} = 0. \qquad (*)$$

Với điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3\frac{x}{2}$ thì được phương trình

$$3\tan^3\frac{x}{2} + 3\tan^2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} - 1 = 0, \text{ hay } \left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)(3\tan^2\frac{x}{2} - 1) = 0.$$

1.38. Giả sử một góc của tam giác vuông ABC có số đo độ thoả mãn phương trình đã cho. Ta viết phương trình đã cho thành

$$\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - 3\cos^3 x = 0, \ (0^\circ < x \leq 90^\circ). \qquad (1)$$

Dễ thấy $x = 90^\circ$ không phải là nghiệm phương trình, vậy $\cos x \neq 0$ và ta có thể chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 x$ được :

(1) $\Leftrightarrow \tan^3 x + 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + 3\tan x + 3) = 0$.

Vì phương trình $\tan^2x + 3\tan x + 3 = 0$ vô nghiệm, nên (1) $\Leftrightarrow$ $\tan x = 1$. Kết hợp với điều kiện $0^\circ < x < 90^\circ$ ta thấy chỉ có $x = 45^\circ$ là thoả mãn. Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân.

1.39. a) $x = \frac{k\pi}{4}$.

Hướng dẫn. $\sin x\sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x)$ và $\sin 3x\sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$.

Chú ý thu gọn hai họ nghiệm thành một.

b) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}$.

Hướng dẫn. $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$ và $\sin 9x\cos 7x = \frac{1}{2}(\sin 16x + \sin 2x)$.

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}$.

Hướng dẫn. $\cos x\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$, $\sin 2x\sin 6x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

và $\sin 4x\sin 6x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 10x)$.

d) $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{k\pi}{5}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$\sin 4x\sin 5x + \sin 4x\sin 3x - \sin 2x\sin x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin 4x\sin 5x + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin 4x\sin 5x + \sin 5x\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x(\sin 4x + \sin 2x) = 0$.

1.40. a) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. $\sin 5x + \sin 3x = 2\sin 4x\cos x$.

b) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn. $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x$.

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Giải. Ta biến đổi phương trình đã cho như sau (để ý : $\sin 4x = 4\sin x\cos x\cos 2x$) :

$(\cos x + \cos 3x) + 2\cos(x + 4x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + 2(\cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos 2x\cos x + 2\cos 4x\cos x - 8\sin^2 x\cos x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x\,(\cos 2x + \cos 4x - 4\sin^2 x\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x\ [\cos 2x + (2\cos^2 2x - 1) - 2(1 - \cos 2x)\cos 2x] = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1\right) = 0$.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

Do $\left|\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}\right| < 1$ nên có các số α và β sao cho $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Từ đó

$\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow 2x = \pm\alpha + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$.

$\cos 2x = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow 2x = \pm\beta + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$.

Kết luận. Phương trình đã cho các nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\beta}{2} + k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{16}$.

Giải. Vế trái phương trình được biến đổi thành :

$(\cos 22x + \cos 10x) + 3(\cos 18x + \cos 14x) = 2\cos 16x\cos 6x + 6\cos 16x\cos 2x$

$= 2\cos 16x\,(\cos 6x + \cos 2x + 2\cos 2x) = 2\cos 16x(2\cos 4x\cos 2x + 2\cos 2x)$

$= 4\cos 16x\cos 2x(\cos 4x + 1) = 8\cos 16x\cos^3 2x.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 16x\cos^3 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 16x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{16}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

1.41. a) $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Hướng dẫn. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với :

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0.$

b) $x = \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \dfrac{k\pi}{9}$.

Hướng dẫn. Dùng công thức hạ bậc rồi rút gọn thì được

$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$ hay $2\cos 7x\cos x = 2\cos 11x\cos x.$

Cuối cùng, cần chú ý thu gọn các họ nghiệm.

c) $x = \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Dùng công thức hạ bậc rồi rút gọn thì được

$\dfrac{1}{2}(\cos 12x - \cos 4x) + \sin^2 4x = 0.$

Biến đổi tiếp thành $-\sin 8x\sin 4x + \sin^2 4x = 0$ hay $-2\cos 4x\sin^2 4x + \sin^2 4x = 0.$

d) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}$.

e) $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{8}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

f) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng các công thức $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ và $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ để biến đổi đưa về phương trình đối với $\cos 2x$.

g) $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Tương tự câu f).

h) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\alpha + k\pi$, trong đó $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Tương tự câu f).

1.42. a) $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{4}$

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(4x + \dfrac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Vậy với điều kiện $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$ và $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin\left(4x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$. Có thể thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp. Chẳng hạn, ta có

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}\right) \neq 0.$$

b) $x = -\dfrac{9\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Áp dụng công thức $\tan a + \cot b = \dfrac{\cos(a-b)}{\cos a.\sin b}$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cot\left(4x + \frac{7\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(2x + \dfrac{13\pi}{8}\right)}{\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{4}\right)\sin\left(4x + \dfrac{7\pi}{8}\right)} = 0.$$

Do đó, với điều kiện $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \neq 0$ và $\sin\left(4x + \frac{7\pi}{8}\right) \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\cos\left(2x + \frac{13\pi}{8}\right) = 0$. Thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp.

c) $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).\tan\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x}{2}} = 0.$$

Do đó, với điều kiện $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ và $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Thử lại điều kiện bằng cách trực tiếp.

d) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$, ta có :

$$\sin 2x + 2\cot x = 3 \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{\tan x} = 3.$$

Giải tiếp phương trình này với điều kiện $\tan x \neq 0$.

1.43. a) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ với điều kiện $\cos x \neq 0$.

b) $x = 45^\circ + k180^\circ$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình với điều kiện $\cos(x - 15^\circ) \neq 0$ và $\sin(x + 15^\circ) \neq 0$:

$$\tan(x - 15^\circ)\cot(x + 15^\circ) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin(x-15^\circ)\cos(x+15^\circ)}{\cos(x-15^\circ)\sin(x+15^\circ)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin 30^\circ}{\sin 2x + \sin 30^\circ} = \frac{1}{3}.$$

c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Phương trình được viết thành :

$\sin 2x + 2(2\cos^2 x - 1) = 1 + \sin x - 4\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (4\cos^2 x - 1) + 4\cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x + 1)(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0$.

d) $x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Hướng dẫn. Quy về giải phương trình trùng phương đối với $\cos x$.

e) $x = \pi + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành $(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$.

f) $x = k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$.

g) $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,\ x = \frac{7\pi}{12} + l\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành

$\tan x\,(1 - \sin^2 x) + \cot x\,(1 - \cos^2 x) + \sin 2x = -1$.

1.44. a) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ta biến đổi phương trình đã cho thành :

$$\cos x\left(\tan\frac{x}{2} - 2\sin x\right) = 0 \text{ hay } \cos x \sin\frac{x}{2}\left(1 - 4\cos^2\frac{x}{2}\right) = 0.$$

b) $x = \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. Áp dụng hằng đẳng thức dễ thấy :

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2)$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos x + \cos^6 x = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow -3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos x = 0.$$

c) $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$.

Hướng dẫn. $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

d) $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5}$, $x = -\frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5}$, $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin^2 x + \sin x\cos 4x + \frac{\cos^2 4x}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 4x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \frac{1}{2}\cos 4x)^2 = \frac{3}{4}(1 - \cos^2 4x) \Leftrightarrow (\sin x + \frac{1}{2}\cos 4x)^2 = \frac{3}{4}\sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \\ \sin x + \frac{1}{2}\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{6}\sin 4x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 4x = \sin x \\ \sin\frac{\pi}{6}\cos 4x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 4x = \sin(-x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \\ \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-x). \end{array}\right.$$

1.45. $x = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}95.$

Giải. Ta có $\cos x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3}.$$

Đặt $t = \cos x + \sin x$ với $|t| \leq \sqrt{2}$. Khi đó $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$ và phương trình trở thành

$$t + \frac{2t}{t^2-1} = \frac{10}{3}. \qquad (1)$$

Với điều kiện $t \neq \pm 1$, ta có :

$(1) \Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t^2 - 4t - 5) = 0.$

Phương trình này có ba nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{2+\sqrt{19}}{3}$ và $t_3 = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$.

Tuy nhiên, chỉ có $t_3 = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ là thoả mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$. Do đó phương trình đã cho tương đương với $\cos x + \sin x = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$ hay

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Điều kiện $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ tương đương với điều kiện $0 < x - \frac{\pi}{4} < \pi$. Với điều kiện đó ta có

$(2) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}.$

Lấy các giá trị gần đúng $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ và $\arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}160$ ta được $x \approx 2{,}95$.

1.46. $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Xét phương trình $\tan x - \tan\dfrac{x}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ (đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$) và chứng tỏ rằng phương trình đó trên khoảng $(0 ; \pi)$ có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\pi}{3}$.

1.47. *Giải.* Phương trình đã cho có thể viết thành $2\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m = 0$.

Phương trình này tương đương với $\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = m.\end{array}\right.$

a) Với $m = \dfrac{3}{2}$ thì phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm ; phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ có các nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. Đó cũng là các nghiệm của phương trình đã cho.

b) Do các nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ không thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Điều đó xảy ra nếu và chỉ nếu $-1 \le m < 0$.

1.48. $x = k\pi$, $\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ và $\dfrac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Giải

$(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$ (1)

$\Leftrightarrow 4\sin x\sin 2x + 2\sin x - 2\sin 2x - 1 = 3 - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos x + \sin x - 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos x + \sin x - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,[4\sin x\cos x + 1 - 2(\sin x + \cos x)] = 0.$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.
- $4\sin x\cos x + 1 - 2(\sin x + \cos x) = 0.$ (2)

Để giải phương trình (2), ta đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$. Khi đó $2\sin x\cos x = t^2 - 1$ và từ phương trình (2) ta có phương trình $2t^2 - 2t - 1 = 0$ với ẩn t. Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Cả hai nghiệm này đều thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = t_1\\ \sin x + \cos x = t_2.\end{array}\right.$

$\sin x + \cos x = t_1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$\sin x + \cos x = t_2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Kết luận. Phương trình đã cho có các nghiệm $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} \pm \beta + 2k\pi$ với α và β là các số thoả mãn $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ và $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (chẳng hạn, $\alpha = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\beta = \arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$).

1.49. $0 < m < 1$.

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned}\cos 6x &= \cos(2x + 4x) = \cos 2x\cos 4x - \sin 2x\sin 4x\\ &= \cos 2x(2\cos^2 2x - 1) - 2\sin^2 2x\cos 2x\\ &= 2\cos^3 2x - \cos 2x - 2(1 - \cos^2 2x)\cos 2x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x.\end{aligned}$$

Áp dụng kết quả đó, phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\cos 4x = \cos^2 3x + m\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{m(1-\cos 2x)}{2}$$

$\Leftrightarrow 2(2\cos^2 2x - 1) = 1 + \cos 6x + m - m\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 2 = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + m - m\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - (m + 3)\cos 2x + m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)[4\cos^2 2x - (m+3)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ 4\cos^2 2x = m+3.\end{array}\right.$

Nếu phương trình có nghiệm $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{12}\right)$ thì $2x \in \left(0\,;\frac{\pi}{6}\right)$,

suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2x < 1$ và $\frac{3}{4} < \cos^2 2x < 1$, nghĩa là $3 < m + 3 < 4$ hay $0 < m < 1$.

Ngược lại, dễ thấy rằng nếu $0 < m < 1$ thì phương trình có nghiệm $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{12}\right)$.

1.50. a) $x = \frac{4\pi}{3}$

Hướng dẫn. Vì trên khoảng $(0\,;2\pi)$, phương trình không xác định với $x = \pi$ nên ta xét phương trình trên từng khoảng $(0\,;\pi)$ và $(\pi\,;2\pi)$.

– Trên khoảng $(0\,;\pi)$ ta có $\sin x > 0$ nên phương trình trở thành $1 = \cos x - \frac{1}{2}$;

– Trên khoảng $(\pi\,;2\pi)$ ta có $\sin x < 0$ nên phương trình trở thành $-1 = \cos x - \frac{1}{2}$.

b) $x = \frac{\pi}{16}$, $x = \frac{9\pi}{16}$, $x = \frac{21\pi}{16}$ và $x = \frac{29\pi}{16}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thành $\frac{\cos 2x \sin x}{|\sin x|} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, sau đó xét phương trình trên mỗi khoảng $(0\,;\pi)$ và $(\pi\,;2\pi)$.

1.51. a) (D) ; b) (B).

1.52. Chọn phương án (B) vì hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}\,;0\right)$ và khi tịnh tiến khoảng này sang phải một đoạn dài $10\pi = 5.2\pi$ thì được khoảng $\left(\frac{19\pi}{2}\,;10\pi\right)$

1.53. Chọn phương án (D) vì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\,;\pi\right)$ và khi tịnh tiến khoảng này sang trái một đoạn dài $6\pi = 3.2\pi$ thì được khoảng $\left(-\frac{11\pi}{2}\,;-5\pi\right)$

1.54. Chọn phương án (C) vì $P = \dfrac{2\cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\cos(35^\circ + 5^\circ)} = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$.

1.55. Chọn phương án (B) vì với $x = 290^\circ$, ta có

$$\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ \text{ và } \sin 290^\circ = -\sin 70^\circ = -\cos 20^\circ.$$

1.56. Chọn phương án (D).

Hướng dẫn. Viết lại phương trình dưới dạng $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{15}\right)$.

Bằng cách thử vào phương trình, ta thấy chỉ có các số $\dfrac{71\pi}{30}$ và $\dfrac{9\pi}{2}$ là nghiệm đúng phương trình. Tuy nhiên, chúng đều không thuộc khoảng $\left(\dfrac{5\pi}{2} ; 4\pi\right)$ đang xét.

1.57. Chọn phương án (D).

Hướng dẫn. Đặt $y = 4x$ ta có $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < y < 2\pi$. Phương trình đã cho dẫn đến phương trình $\tan^2 y + 3\tan y - 4 = 0$ hay $\left[\begin{array}{l}\tan y = 1 \\ \tan y = -4.\end{array}\right.$

Trong khoảng $(0 ; 2\pi)$, mỗi phương trình $\tan y = 1$ và $\tan y = -4$ đều có hai nghiệm.

1.58. Nếu xét trên khoảng $(0 ; 2\pi)$ thì cả hai hàm số cùng đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right)$ và cùng nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right)$. Do đó

a) Hai hàm số cùng đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi ; 2\pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Hai hàm số cùng nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi ; \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.59. a) Hàm số $y = \tan(\pi x)$ xác định khi và chỉ khi $\cos(\pi x) \neq 0$. Mặt khác

$$\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

$(k \in \mathbb{Z})$.

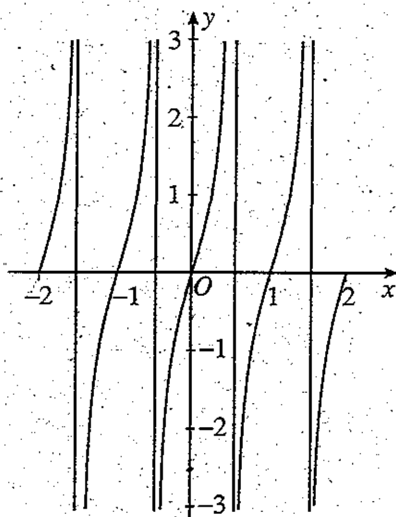
Từ đó suy ra tập xác định của hàm số $y = \tan(\pi x)$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2} + k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$f(x+k) = \tan\left[\pi\left(x+k\right)\right] = \tan(\pi x + k\pi)$$

$$= \tan(\pi x) = f(x).$$



Hình 1.20

Trong các số nguyên dương, số 1 là nhỏ nhất. Do đó $\tan(\pi x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 1$.

c) Ta thấy

$$-\frac{1}{2} + k < x < \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < \pi x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Từ đó suy ra hàm số $\tan(\pi x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{1}{2} + k\,;\,\frac{1}{2} + k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Đồ thị của hàm số có dạng như hình 1.20.

1.60. Ta có :

$$\cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) = \frac{1+\cos 2(x-a)}{2} + \frac{1-\cos 2(x-b)}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2(x-a) - \cos 2(x-b)] = 1 + \sin(2x-a-b)\sin(a-b).$$

Do đó

$$\cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)$$

$$= 1 + \sin(2x-a-b)\sin(a-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)$$

$$= 1 + \sin(a-b)[\sin(2x-a-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)]$$

$$= 1 + \sin(a-b)[\sin(2x-a-b) - \sin(2x-a-b) - \sin(a-b)]$$

$$= 1 - \sin^2(a-b) = \cos^2(a-b).$$

1.61. a) $x = \frac{41\pi}{126} + k\frac{2\pi}{3}, x = -\frac{29\pi}{126} + k\frac{2\pi}{3}$.

b) $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

c) $x = 2k\pi, x = \pm\alpha + 2k\pi$, với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. Quy về phương trình bậc hai đối với $\cos x$.

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \alpha + 2k\pi, x = \pi - \alpha + 2k\pi$ với $\sin\alpha = -\frac{1}{7}$.

Hướng dẫn. Quy về phương trình bậc hai đối với $\sin x$.

e) $x = \pi + 2k\pi$.

f) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Hướng dẫn. Viết lại phương trình như sau :

$3(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin^2 x + 2(1 + \sqrt{2})\sin x - 3 - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$.

1.62. $x = 0, x = \pi \approx 3{,}14$; $x = 2\pi \approx 6{,}28$; $x = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ và $x = \frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$.

Hướng dẫn. Do $\sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \cos 2x$ và $\cos\left(x - \frac{15\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên phương trình đã cho có thể viết lại thành $\cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$ hay $\sin x - 2\sin^2 x = 0$. Trên đoạn $[0 ; 2\pi]$, phương trình này có các nghiệm $x = 0$, $x = \pi, x = 2\pi, x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

1.63. a) $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$; $x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$2\sqrt{2}\sin x\cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2} - 4)\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$.

c) $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

d) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \alpha + k\pi$, trong đó $\cot\alpha = -3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$8\sqrt{3}\sin x\cos x + 8\cos^2 x - 4\sin^2 x = 5\sin^2 x + 5\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x + 8\sqrt{3}\sin x\cos x - 9\sin^2 x = 0.$$

1.64. a) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}.$

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin 3x \neq 0$, ta biến đổi phương trình đã cho như sau :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} - \sin 2x - \sqrt{2}\cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x - \sqrt{2}\sin 3x\cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) = 0.$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$, trong đó $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Hướng dẫn. Ta có $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ và $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Với điều kiện $\cos 2x \neq -1$, phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\tan^2 x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 1 - 2\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x(\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0.$$

c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow 9(\sin x - 1) - 6\cos x(\sin x - 1) + 2(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(7 - 6\cos x - 2\sin x) = 0.$$

d) $x = \frac{k\pi}{2}.$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos^4 x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 + \sin 2x)^2 = \frac{1}{4} + \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x).$

e) $x = \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình đã cho như sau :

$(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow 6\sin x\cos 4x + 4\sin^2 x - 8\sin x + 3\cos 4x + 2\sin x - 4 + 4\cos^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6\sin x\cos 4x + 3\cos 4x - 6\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\cos 4x - 1) = 0.$

f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Hướng dẫn. Do $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ nên phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\sqrt{2}\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 = 4\sin x.$$

Với điều kiện $\cos x \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ để đưa về phương trình đối với $\tan x$.

1.65. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$ với $\cos\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin x \neq 0$, ta có

$2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x) = 0.$

Đối với phương trình, $\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0.$

Đặt $t = \sin x - \cos x$ với $|t| \leq \sqrt{2}$.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2m\pi$, với $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos x \neq 0$, ta có

$\tan^2 x(1 - \sin^3 x) + \cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin^3 x) - \cos^2 x(1 - \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 - \sin^3 x) - (1 - \sin^2 x)(1 - \cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)[(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x\,(\sin x - \cos x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)\,(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x) = 0$

Đối với phương trình $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$, đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$.

Chú ý rằng tất cả các nghiệm của phương trình $1 - \sin x = 0$ đều không thoả mãn điều kiện $\cos x \ne 0$ nên bị loại.

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4} + l\pi$.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\sin 2x \ne 0$, ta có

$1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x = 1 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x - \cos 2x - \sin 2x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0.$

Chú ý, loại các giá trị của x không thoả mãn điều kiện $\sin 2x \ne 0$.

d) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Với điều kiện $\cos 2x \ne 0$, ta có

$6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x} \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x \Leftrightarrow 3\sin x - \cos^3 x - 5\sin x\cos^2 x = 0.$

Với $\cos x \ne 0$, chia hai vế cho $\cos^3 x$ ta được một phương trình đối với $\tan x$. Tuy nhiên các nghiệm của phương trình này đều không thoả mãn điều kiện $\cos 2x \ne 0$.

1.66. $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{10}, x = \frac{7\pi}{6}$ và $x = \frac{13\pi}{10}$.

Giải. Điều kiện xác định của phương trình là $\cos x \ne 0$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = 2\sin 2x. \qquad (1)$$

Do $x = \pi$ không là nghiệm của (1) nên ta chỉ cần xét hai khả năng sau :

1) $x \in (0\,;\pi)$. Lúc này $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, kéo theo $\cos\frac{x}{2} > 0$ và $\sin\frac{x}{2} > 0$. Do đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{4l\pi}{5}. \end{array}\right.$$

Để tìm nghiệm thuộc khoảng $(0 ; \pi)$, ta cần tìm k và l nguyên sao cho

- $0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < k < \frac{5}{8} \Leftrightarrow k = 0$. Ta nhận được $x = \frac{\pi}{6}$.
- $0 < \frac{3\pi}{10} + l\frac{4\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < l < \frac{7}{8} \Leftrightarrow l = 0$. Ta nhận được $x = \frac{3\pi}{10}$.

2) $x \in (\pi ; 2\pi)$. Lúc này $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$, kéo theo $\cos\frac{x}{2} < 0$ và $\sin\frac{x}{2} > 0$. Do đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + l\frac{4\pi}{5}. \end{array}\right.$$

Tương tự trên, ta có

- $\pi < -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{7}{8} < k < \frac{13}{8} \Leftrightarrow k = 1$.

Ta nhận được $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

- $\pi < \frac{\pi}{2} + l\frac{4\pi}{5} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{5}{8} < l < \frac{15}{8} \Leftrightarrow l = 1$.

Ta nhận được $x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$.

Kết luận. Trong khoảng $(0 ; 2\pi)$, phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{10}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ và $x = \frac{13\pi}{10}$.

1.67. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \alpha + l\pi$, với $\tan\alpha = 2$.

Hướng dẫn. Đưa về phương trình bậc hai đối với $\tan x$ bằng cách chia hai vế cho $\cos x$.

b) $m \leq -4$ hoặc $m > 0$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ của phương trình là $\cos x \neq 0$. Với điều kiện đó, chia hai vế cho $\cos x$ và đặt $\tan x = t$ ta được phương trình

$$mt^2 - mt - 1 = 0. \quad (1)$$

Do phương trình $\tan x = t$ có nghiệm với mọi t nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm.

CHƯƠNG 2 TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

TỔ HỢP

- Quy tắc cộng : Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1, n_2 cách thực hiện phương án A_2,..., và có n_k cách thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

- Quy tắc nhân : Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, ..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \ldots n_k$ cách.

- Cho tập hợp A có n phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ta được *một hoán vị của tập A*. Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n và bằng $n!$.

- Cho tập hợp A gồm n phần tử và k là một số nguyên dương với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra một tập con gồm k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một *chỉnh hợp chập k của n phần tử của A* (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

  Số chỉnh hợp chập k của một tập hợp n phần tử được kí hiệu là A_n^k.

  Với quy ước $A_n^0 = 1$ và $0! = 1$ ta có

  $$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \; (0 \leq k \leq n).$$

- Cho tập A có n phần tử và số tự nhiên k với $0 \le k \le n$. Một tập con của A có k phần tử được gọi là *một tổ hợp chập k của n phần tử của A* (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử, kí hiệu là C_n^k, được cho bởi công thức

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pa-xcan chính là dãy gồm $n + 1$ số sau :

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n.$$

- Công thức khai triển nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

XÁC SUẤT

- Tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử T được gọi là không gian mẫu (của phép thử T) và được kí hiệu bởi Ω.
- Một *biến cố A* liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
- Hai biến cố A và B được gọi là *xung khắc* nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Nói cách khác, A và B xung khắc nếu A và B không bao giờ đồng thời xảy ra.
- Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Giả sử phép thử T có không gian mẫu là Ω và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố và $\Omega_A \subset \Omega$ là tập hợp mô tả A thì *xác suất* của A được xác định bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}.$$

Trong đó kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp X (người ta còn dùng $n(X)$ để thay cho $|X|$).

- Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

- Nếu $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A (tức là biến cố "không xảy ra A") thì $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là các biến cố độc lập thì

$$P(A_1 A_2 ... A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k).$$

- Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

– *Kì vọng* của X, kí hiệu là E(X), là một số được tính theo công thức

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i,$$

ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

– *Phương sai* của X, kí hiệu là V(X), là một số không âm được tính theo công thức

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

hoặc $$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2,$$

ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$; $\mu = E(X)$.

– Căn bậc hai số học của phương sai của X được gọi là *độ lệch chuẩn* của X, kí hiệu là $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

B – ĐỀ BÀI

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

2.1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều số đứng giữa thì giống nhau ?

2.2. Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra mà tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc là 9 ?

2.3. Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Hỏi

a) Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của 4 hành khách ?

b) Có bao nhiêu trường hợp mà mỗi toa có một người lên ?

c) Có bao nhiêu trường hợp mà một toa có ba người lên, một toa có một người lên và hai toa còn lại không có ai lên ?

2.4. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng (2000 ; 3000) có thể tạo nên bằng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 nếu

a) Các chữ số của nó không nhất thiết khác nhau ?

b) Các chữ số của nó khác nhau ?

2.5. Có bao nhiêu số có 3 chữ số được tạo thành từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6 nếu

a) Các chữ số của nó không nhất thiết khác nhau ?

b) Các chữ số của nó khác nhau ?

c) Các chữ số của nó hoàn toàn như nhau ?

2.6. Có bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 4000 có 4 chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 3, 5, 7 nếu

a) Các chữ số của nó không nhất thiết khác nhau ?

b) Các chữ số của nó khác nhau ?

2.7. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái đầu tiên trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu ?

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

2.8. Dãy $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ trong đó mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 được gọi là dãy nhị phân 10 bit ?

a) Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit ?

b) Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit mà trong đó có ít nhất ba kí tự 0 và ít nhất ba kí tự 1?

2.9. Một tổ học sinh gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Giáo viên chọn 4 học sinh để đi trực thư viện. Có bao nhiêu cách chọn nếu

a) Chọn học sinh nào cũng được ?

b) Trong 4 học sinh được chọn, có đúng một nữ sinh được chọn ?

c) Trong 4 học sinh được chọn, có ít nhất một nữ sinh được chọn ?

2.10. Có bao nhiêu hoán vị của tập hợp $\{a, b, c, d, e, f\}$ mà phần tử cuối bằng a ?

2.11. Một nhóm học sinh gồm n nam và n nữ đứng thành hàng ngang. Có bao nhiêu tình huống mà nam, nữ đứng xen kẽ nhau ?

2.12. Một tập hợp có 100 phần tử. Hỏi nó có bao nhiêu tập con có nhiều hơn 2 phần tử ?

2.13. Một tổ bộ môn của một trường có 10 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ. Có bao nhiêu cách thành lập một hội đồng gồm 6 uỷ viên của tổ bộ môn, trong đó số uỷ viên nam ít hơn số uỷ viên nữ ?

2.14. Có bao nhiêu biển đăng kí xe gồm 6 kí tự trong đó ba kí tự đầu tiên là ba chữ cái (sử dụng 26 chữ cái), ba kí tự tiếp theo là ba chữ số. Biết rằng mỗi chữ cái và mỗi chữ số đều xuất hiện không quá một lần.

2.15. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, biết rằng hai chữ số đứng kề nhau phải khác nhau ?

2.16. Một người có 7 áo (trong đó có 3 áo trắng) và 5 cà vạt (trong đó có 2 cà vạt màu vàng). Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn bộ áo – cà vạt trong mỗi trường hợp sau :

a) Chọn áo nào cũng được và cà vạt nào cũng được ?

b) Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt vàng ?

2.17. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu

a) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau ?

b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau ?

2.18. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hỏi có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y) thoả mãn $x, y \in A$ và $x \geq y$?

2.19. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho 6 người khách ngồi quanh một bàn tròn ? (Hai cách sắp xếp được xem là như nhau nếu cách này nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn đi một góc nào đó).

2.20. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng của ba chữ số này là 8 ?

2.21. Một dãy có 5 chiếc ghế dành cho 5 học sinh, trong đó có 3 nam sinh và 2 nữ sinh.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh đó ?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh nói trên sao cho nam sinh và nữ sinh ngồi xen kẽ nhau.

2.22. a) Một người có 4 pho tượng khác nhau và muốn bày 4 pho tượng vào dãy 6 vị trí trên một kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp ?

b) Một người có 8 pho tượng khác nhau và muốn bày 6 pho tượng trong số đó vào 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp ?

2.23. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hãy tính số các số tự nhiên

a) Có 5 chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi chữ số khác chữ số 1

b) Có 5 chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi 24.

c) Có 5 chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bởi 241.

2.24. Với các chữ số 0, 1, 3, 6, 9 có thể lập được

a) Bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

b) Bao nhiêu số lẻ với 4 chữ số khác nhau.

c) Bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số khác nhau.

d) Bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

2.25. Trong một đa giác lồi n cạnh ($n > 3$) ta kẻ tất cả các đường chéo. Biết rằng không có ba đường chéo nào trong chúng đồng quy. Tìm số giao điểm của các đường chéo này.

2.26. Trong mặt phẳng cho đa giác đều $\boldsymbol{H}$ có 20 cạnh. Hỏi

a) Có bao nhiêu tam giác mà cả ba đỉnh đều là đỉnh của $\boldsymbol{H}$?

b) Trong số các tam giác ở câu a) có bao nhiêu tam giác mà :

i) Có đúng hai cạnh là cạnh của $\boldsymbol{H}$?

ii) Có đúng một cạnh là cạnh của $\boldsymbol{H}$?

iii) Không có cạnh nào là cạnh của $\boldsymbol{H}$?

2.27. Cho hai đường thẳng a, b song song. Xét tập $\boldsymbol{H}$ có 30 điểm khác nhau, trong đó trên đường thẳng a có 10 điểm và trên đường thẳng b có 20 điểm của $\boldsymbol{H}$. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập $\boldsymbol{H}$?

§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

2.28. Viết 3 số hạng đầu tiên theo luỹ thừa tăng dần của x của các đa thức sau :

a) $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{10}$; b) $(3-2x)^8$.

2.29. Tìm số hạng thứ 4 trong khai triển $(a-2x)^{20}$ theo luỹ thừa tăng dần của x.

2.30. Viết 4 số hạng đầu tiên theo luỹ thừa tăng dần của x của các đa thức sau :

a) $(1-3x)^{12}$; b) $(1-2x)^9$; c) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{20}$.

2.31. Tìm :

a) Số hạng thứ 8 trong khai triển của $(1-2x)^{12}$.

b) Số hạng thứ 6 trong khai triển của $\left(2-\frac{x}{2}\right)^9$.

c) Số hạng thứ 12 trong khai triển của $(2-x)^{15}$.

Các số hạng được sắp xếp theo thứ tự luỹ thừa tăng dần của x.

2.32. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$.

2.33. Cho đa giác đều có $2n$ cạnh $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nội tiếp trong một đường tròn. Biết rằng số tam giác có đỉnh lấy trong 2n điểm $A_1,\ldots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có đỉnh lấy trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Tìm n.

§4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

§5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

2.34. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ ta được một xấp bài. Tính xác suất để trong xấp bài này chứa hai bộ đôi (tức là có hai con cùng thuộc một bộ, hai con thuộc bộ thứ hai, con thứ 5 thuộc bộ khác).

2.35. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để trong xấp bài này 5 quân lập thành một bộ tiến liên tiếp (là các bộ (A–2–3–4–5) (2–3–4–5–6),..., (10–J–Q–K–A)) (Quân A (át) được coi là vừa là quân lớn nhất vừa là quân bé nhất).

2.36. Tính xác suất để khi gieo con súc sắc 6 lần độc lập, không lần nào xuất hiện mặt có số chấm là một số chẵn.

2.37. Trên một cái vòng hình tròn dùng để quay xổ số, có gắn 38 con số từ 1 đến 36 và hai số 0 ; 00. Trong 36 số từ 1 đến 36 có 18 số chẵn màu đỏ, 18 số lẻ màu đen ; hai số còn lại 0 và 00 không đỏ cũng không đen. Xác suất để bánh xe sau khi quay, dừng ở mỗi số đều bằng nhau.

a) Tính xác suất để : Khi quay một lần

i) Kết quả dừng ở số màu đỏ.

ii) Kết quả dừng ở số 0 hoặc 00.

b) Tính xác suất để : Khi quay hai lần liên tiếp

i) Cả hai lần kết quả dừng ở con số màu đen .

ii) Bánh xe dừng tại một số giữa 1 và 6 (kể cả 1 và 6) trong lần quay đầu nhưng không dừng lại giữa chúng trong lần quay thứ hai.

c) Quay 5 lần liên tiếp. Tính xác suất để không lần nào kết quả dừng ở số 0 hoặc 00.

2.38. Có ba bình A, B, C mỗi bình chứa ba quả cầu trắng, ba quả cầu xanh và ba quả cầu đỏ. Từ mỗi bình lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để

a) Ba quả cầu có màu đôi một khác nhau.

b) Ba quả cầu có màu giống nhau.

c) Hai quả có cùng màu còn quả kia khác màu.

2.39. Ba quân bài rút từ 13 quân cùng chất rô (2–3–... –10–J–Q–K–A).

a) Tính xác suất để trong ba quân bài đó không có Q và K.

b) Tính xác suất để trong ba quân bài đó có K hoặc Q hoặc cả hai.

c) Tính xác suất để trong ba quân bài đó rút được cả K và Q.

2.40. Một bình chứa 16 viên bi, với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên ba viên bi. Tính xác suất để :

i) Lấy được cả ba viên bi đỏ.

ii) Lấy được cả ba viên bi không đỏ.

iii) Lấy được một viên bi trắng, một viên bi đen, một viên bi đỏ.

b) Lấy ngẫu nhiên bốn viên bi. Tính xác suất để

i) Lấy được đúng một viên bi trắng.

ii) Lấy được đúng hai viên bi trắng.

c) Lấy ngẫu nhiên mười viên bi. Tính xác suất rút được 5 viên bi trắng, 3 viên bi đen và 2 viên bi đỏ.

2.41. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1, 2,..., 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để

a) Tích nhận được là số lẻ.

b) Tích nhận được là số chẵn.

2.42. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1, 2, ..., 9. Rút ngẫu nhiên 5 thẻ. Tính xác suất để

a) Các thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

b) Có đúng một trong ba thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

c) Không thẻ nào trong ba thẻ ghi các số 1, 2, 3 được rút.

2.43. Tám người trong đó có hai vợ chồng anh A được xếp ngẫu nhiên xung quanh một bàn tròn. Tính xác suất để hai vợ chồng anh A ngồi cạnh nhau (cách sắp xếp được hiểu như bài 2.19).

2.44. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $\{1, 2, ..., 11\}$.

a) Tính xác suất để tổng ba số được chọn là 12.

b) Tính xác suất để tổng ba số được chọn là số lẻ.

2.45. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

2.46. Một người say rượu bước bốn bước. Mỗi bước anh ta tiến lên phía trước nửa mét hoặc lùi lại phía sau nửa mét với xác suất như nhau. Tính xác suất để sau bốn bước đó anh ta trở lại điểm xuất phát.

2.47. Chọn ngẫu nhiên 3 người, biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận. Hãy tính xác suất để có ít nhất hai người có sinh nhật trùng nhau (cùng ngày, cùng tháng).

2.48. Một người đi du lịch mang 3 hộp thịt, 2 hộp quả và 3 hộp sữa. Do trời mưa nên các hộp bị mất nhãn. Người đó chọn ngẫu nhiên ba hộp. Tính xác suất để trong đó có một hộp thịt, một hộp sữa, một hộp quả.

2.49. Trong danh sách 10 đường phố cần tu sửa ở Hà Nội, có 2 đường thuộc quận Hoàn Kiếm, 4 đường thuộc quận Ba Đình, 4 đường thuộc quận Đống Đa. Chọn ngẫu nhiên bốn đường để tu sửa đợt đầu. Tính xác suất để

a) 2 đường thuộc quận Ba Đình, 2 đường thuộc quận Đống Đa được chọn.

b) Một đường thuộc quận Hoàn Kiếm, 2 đường thuộc quận Ba Đình và một đường thuộc quận Đống Đa được chọn.

§6. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

2.50. Gieo một con súc sắc cân đối ba lần. Gọi X là số lần con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính $E(X)$ và $V(X)$.

2.51. Xác suất bắn trúng vòng 10 của An là 0,4. An bắn 3 lần. Gọi X là số lần trúng vòng 10.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính $E(X)$ và $V(X)$.

2.52. Anh Bình mua bảo hiểm của công ti bảo hiểm A. Công ti A trả 500 nghìn đồng nếu anh Bình ốm ; 1 triệu đồng nếu anh Bình gặp tai nạn và 6 triệu đồng nếu anh Bình ốm và gặp tai nạn. Mỗi năm anh Bình đóng 100 nghìn đồng bảo hiểm. Biết rằng trong một năm xác suất để anh Bình ốm và gặp tai nạn là 0,0015 ; ốm nhưng không gặp tai nạn là 0,0485 ; không ốm nhưng gặp tai nạn là 0,0285 ; không ốm và không gặp tai nạn là 0,9215. Gọi X là số tiền công ti bảo hiểm chi trả cho anh Bình mỗi năm.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính $E(X)$. Nêu ý nghĩa.

2.53. Bố của An đề nghị thưởng cho An 90 000 đồng để mua một vật kỉ niệm nào đó, nếu An được điểm giỏi ở cả bốn môn học : Toán, Ngoại ngữ, Tin học, Tiếng Việt (việc đạt điểm giỏi ở các môn là độc lập). Mẹ của An đề nghị với mỗi môn nói trên, môn nào được điểm giỏi thì thưởng 10 nghìn.

Xác suất đạt điểm giỏi của An đối với 4 môn trên tương ứng là : 0,9 ; 0,7 ; 0,8 và 0,6. Giả thiết rằng, kết quả học tập các môn học của An là độc lập với nhau

a) Tính số tiền thưởng trung bình của An nếu theo phương án của bố.

b) Tính số tiền thưởng trung bình của An nếu theo phương án của mẹ.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các bài từ 2.54 đến 2.61, hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho.

2.54. Một bộ ghép hình gồm các miếng gỗ. Mỗi miếng gỗ được đặc trưng bởi 4 tiêu chuẩn : chất liệu, màu sắc, hình dạng và kích cỡ. Biết rằng có hai chất liệu (gỗ, nhựa) ; có 4 màu (xanh, đỏ, lam, vàng) ; có 4 hình dạng (hình tròn, vuông, tam giác, lục giác) và có 3 kích cỡ (nhỏ, vừa, lớn).

i) Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ ?

(A) 45 ; (B) 96 ; (C) 58 ; (D) 84.

ii) Xét miếng gỗ "nhựa, đỏ, hình tròn, vừa". Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ khác miếng gỗ trên ở đúng hai tiêu chuẩn ?

(A) 29 ; (B) 39 ; (C) 48 ; (D) 56.

2.55. Tại một buổi lễ có 13 cặp vợ chồng tham dự. Mỗi ông bắt tay một lần với mọi người trừ vợ mình. Các bà không ai bắt tay với nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay ?

(A) 78 ; (B) 185 ; (C) 234 ; (D) 312.

2.56. Trong các số tự nhiên từ 100 đến 999 có bao nhiêu số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần ?

(A) 120 ; (B) 168 ; (C) 204 ; (D) 216.

2.57. Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh ?

(A) 55012 ; (B) 94536 ; (C) 43200 ; (D) 35684.

2.58. Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Gọi P là xác suất để tổng số ghi trên 6 tấm thẻ ấy là một số lẻ. Khi đó P bằng

(A) $\frac{100}{231}$; (B) $\frac{115}{231}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{118}{231}$.

2.59. Chọn ngẫu nhiên 6 số nguyên dương trong tập $\{1, 2, ..., 10\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần (từ thấp lên cao). Gọi P là xác suất để số 3 được chọn và xếp ở vị trí thứ hai. Khi đó P là :

(A) $\frac{1}{60}$; (B) $\frac{1}{6}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{1}{2}$.

2.60. Có ba chiếc hộp *A, B, C* mỗi hộp chứa ba chiếc thẻ được đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ. Gọi P là xác suất để tổng số ghi trên ba tấm thẻ là 6. Khi đó P bằng :

(A) $\frac{1}{27}$; (B) $\frac{8}{27}$; (C) $\frac{7}{27}$; (D) $\frac{6}{27}$.

2.61. Một con súc sắc cân đối được gieo ba lần. Gọi P là xác suất để tổng số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đầu bằng số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba. Khi đó P bằng:

(A) $\frac{10}{216}$; (B) $\frac{15}{216}$; (C) $\frac{16}{216}$; (D) $\frac{12}{216}$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.62. Tính tổng của tất cả các số có 5 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

2.63. Trên một đường tròn cho trước *n* điểm. Tính số các đoạn thẳng nối tất cả các cặp điểm của *n* điểm này.

2.64. Hỏi với các chữ số 0, 2, 4, 6, 8, 9, có thể lập được bao nhiêu số có tám chữ số mà trong đó chữ số 9 có mặt đúng ba lần còn các chữ số khác xuất hiện đúng một lần ?

2.65. Một đại đội gồm $2n$ chiến sĩ, cần bố trí vào *n* nhà dân khác nhau sao cho mỗi nhà có đúng 2 chiến sĩ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

2.66. Có 12 em bé. Hỏi có bao nhiêu cách ghép 12 em bé này thành 6 cặp ?

2.67. Trong khai triển của $\left(a^{-\frac{1}{6}}\sqrt{b}+b^{-\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a}\right)^{21}$, xác định số hạng mà luỹ thừa của a và b giống nhau.

2.68. Xác định n để trong khai triển của $(x+2)^n$ (theo luỹ thừa giảm của x), hệ số của số hạng thứ 10 lớn hơn hệ số của số hạng thứ 9 và hệ số của số hạng thứ 11.

2.69. Bốn khẩu pháo cao xạ A, B, C và D cùng bắn độc lập vào một mục tiêu. Biết xác suất bắn trúng của các khẩu pháo trên tương ứng là : $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{2}{3}$; $P(C)=\frac{4}{5}$ và $P(D)=\frac{5}{7}$. Tính xác suất để mục tiêu bị trúng đạn.

2.70. Một bài kiểm tra trắc nghiệm có 4 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Nếu trả lời đúng thì được 5 điểm. Nếu trả lời sai thì không được điểm. An làm bài thi bằng cách ở mỗi câu chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Gọi X là tổng số điểm mà An nhận được.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính $E(X)$ và $V(X)$.

2.71. Máy bay Boing 747 có 4 động cơ. Xác suất để mỗi động cơ gặp sự cố khi bay là 0,1. Máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu chỉ có nhiều nhất một trong số 4 động cơ gặp sự cố. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn.

2.72. Số người chết trong một tuần ở vùng A là một biến ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Số trẻ sinh ra trong một tuần ở vùng A là một biến ngẫu nhiên Y có bảng phân bố xác suất như sau

Y	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

a) Tính số trẻ em sinh ra và số người chết trung bình trong một tuần.

b) Số dân tăng trung bình trong một tuần là bao nhiêu ?

C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

2.1. *Hướng dẫn.* Các số cần tìm có dạng $\overline{abcba}$ với $a \in \{1,2,...,9\}$, $b, c \in \{0,1,...,9\}$. Vậy số các số cần tìm là $9.10.10 = 900$.

2.2. Ta phải tìm số các bộ (a, b, c) với $1 \le a \le 6$; $1 \le b \le 6$; $1 \le c \le 6$ sao cho $a + b + c = 9$. Các tập ba số $\{a, b, c\}$ với $a + b + c = 9$ là $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 4, 4\}$, $\{2, 2, 5\}$ và $\{3, 3, 3\}$. Bằng cách hoán vị các phần tử của các tập nói trên (chẳng hạn tập $\{1, 2, 6\}$ cho ta 6 bộ là (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1)) ta được số bộ là :

$$6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25.$$

2.3. Ta đánh số các toa tàu là 1, 2, 3, 4 và kí hiệu bốn người là A, B, C, D. Mỗi tình huống tương ứng với một bộ (a, b, c, d) trong đó a, b, c, d theo thứ tự là số toa mà người A, B, C, D chọn ($1 \le a \le 4$, $1 \le b \le 4$, $1 \le c \le 4$, $1 \le d \le 4$).

a) Có $4.4.4.4 = 256$ trường hợp.

b) Có $4! = 24$ bộ (a, b, c, d) mà a, b, c, d khác nhau.

c) Các tập gồm bốn số $\{a, b, c, d\}$ có đúng ba số bằng nhau là $\{1, 1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 1, 3\}$, $\{1, 1, 1, 4\}$, $\{2, 2, 2, 1\}$, $\{2, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2, 4\}$, $\{3, 3, 3, 1\}$, $\{3, 3, 3, 2\}$, $\{3, 3, 3, 4\}$, $\{4, 4, 4, 1\}$, $\{4, 4, 4, 2\}$, $\{4, 4, 4, 3\}$. Bằng cách hoán vị các số của mỗi tập của 12 tập trên ta được số cách cần tìm là $4.12 = 48$.

2.4. *Hướng dẫn*

a) Các số lẻ trong khoảng (2000 ; 3000) có dạng $\overline{2abc}$ với a và b thuộc tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và c thuộc $\{1, 3, 5\}$. Vậy có $6.6.3 = 108$ số.

b) Chữ số c có 3 cách chọn. Sau đó b có $6 - 2 = 4$ cách và a có $6 - 3 = 3$ cách. Vậy có $3.4.3 = 36$ số.

2.5. a) $5.5.5 = 125$;

b) $5.4.3 = 60$;

c) 5.

2.6. *Hướng dẫn*

Các số như vậy có dạng $\overline{abcd}$ với a thuộc $\{5, 7\}$ còn b, c và d thuộc $\{1, 3, 5, 7\}$.

Do đó

a) Số các số cần tìm là 2.4.4.4 = 128.

b) Chữ số a có 2 cách chọn , b có 3 cách, c có 2 cách và d có 1 cách. Vậy cả thảy có 2.3.2 = 12 cách.

2.7. $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$.

2.8. a) $2^{10} = 1024$.

b) Gọi k là số kí tự 0. Khi đó $10 - k$ là số kí tự 1. Điều kiện $k \geq 3$ và $10 - k \geq 3$ tương đương với $3 \leq k \leq 7$. Có C_{10}^{k} dãy nhị phân 10 bit có k kí tự 0 và $10 - k$ kí tự 1. Vậy số dãy cần tìm là $\sum_{k=3}^{7} C_{10}^{k} = 912$.

2.9. a) $C_{12}^{4} = 495$.

b) Có một nữ và ba nam : Số cách chọn là $C_3^1 C_9^3 = 252$.

c) Số cách chọn toàn nam C_9^4. Vậy số cách chọn có ít nhất một nữ là $C_{12}^{4} - C_9^4 = 369$.

2.10. Có 5! = 120 hoán vị.

2.11. *Hướng dẫn.* Gọi T và G tương ứng là nam và nữ trong hàng. Theo bài ra với dãy mà nam đứng đầu *TGTG....TG* có : $n.n.(n-1)(n-1)....\ 2.2.1.1=(n!)^2$ cách. Tương tự với dãy nữ đứng đầu có $(n!)^2$ cách. Vậy có $2(n!)^2$ cách xếp nam nữ đứng xen kẽ nhau.

2.12. *Hướng dẫn.* Số tập con của tập hợp đã cho là 2^{100}. Số tập con có nhiều nhất 2 phần tử là $1 + 100 + C_{100}^{2} = 5051$. Vậy số tập con có nhiều hơn 2 phần tử là

$$2^{100} - 5051.$$

2.13. Số hội đồng có 2 nam, 4 nữ là $C_{10}^{2} C_{15}^{4}$, số hội đồng có 1 nam, 5 nữ là $C_{10}^{1} C_{15}^{5}$, số hội đồng không có nam (6 nữ) là C_{15}^{6}. Vậy số hội đồng mà nam ít hơn nữ là $C_{10}^{2} C_{15}^{4} + C_{10}^{1} C_{15}^{5} + C_{15}^{6} = 96\,460$.

2.14. Có 26.25.24.10.9.8 = 11 232 000 biển đăng kí xe.

2.15. Số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$. Chữ số a có 9 cách chọn. Sau khi a đã chọn thì b có 9 cách chọn, sau khi b đã chọn thì c có 9 cách chọn,... . Theo quy tắc nhân ta có số các số cần tìm là $9^5 = 59\ 049$.

2.16. a) $7.5 = 35$.

b) Số cách chọn (áo trắng, cà vạt vàng) là $3.2 = 6$. Vậy số cách chọn là $35 - 6 = 29$.

2.17. a) Gọi số lẻ đang xét gồm 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ trong đó $d \in \{1, 3, 5\}$; $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, b và c thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Lập số đó theo quy trình : Chọn d rồi đến a rồi đến b rồi đến c. Ta có 3 cách chọn d. Khi d đã chọn thì a còn $5 - 1 = 4$ cách chọn. (Lưu ý tập $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Khi d, a đã chọn thì có $6 - 2 = 4$ cách chọn b và khi d, a, b đã chọn thì c có 3 cách chọn. Vậy số các số lẻ có thể lập được là $3.4.4.3 = 144$.

b) Gọi các số có 4 chữ số khác nhau được lập từ 6 chữ số đã cho là $\overline{abcd}$ (gồm các số chẵn và các số lẻ). Ta đếm xem có bao nhiêu số như vậy. Ta lập số theo quy trình chọn các chữ số theo thứ tự : a, b, c, d. Có 5 cách chọn a. Khi a đã chọn thì có 5 cách chọn b. Khi a, b đã chọn thì có $6 - 2 = 4$ cách chọn c và khi a, b, c đã chọn thì có 3 cách chọn d. Vậy có $5.5.4.3 = 300$ số như vậy. Theo a), số các số lẻ là 144. Thành thử số số chẵn là $300 - 144 = 156$.

2.18. $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Hướng dẫn. Gọi B là tập các cặp thoả mãn điều kiện đầu bài và $A(k) = \{(k, k)$; $(k, k-1)$;... ; $(k, 1)\}$ với $k = 1, 2,.., n$. Ta có $B = \bigcup_{k=1}^{n} A(k)$, và $|A(k)| = k$.

Hoặc ta có thể lí luận như sau : Một tập con có 2 phần tử của A, ứng với duy nhất một cặp (x, y), với x, y thuộc A và $x \geq y$. Vậy số cặp cần tìm là

$$C_n^2 + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.19. Có $5! = 120$ cách.

Hướng dẫn. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học khẳng định tổng quát sau : Có $(n-1)!$ cách xếp n $(n \geq 2)$ người quanh một bàn tròn. Để xếp $n + 1$ người quanh bàn tròn ta xếp n người đầu tiên rồi xếp người cuối cùng vào 1 trong n khoảng trống giữa n người. Theo giả thiết quy nạp và quy tắc nhân ta có $(n-1)!n = n!$ cách xếp $n + 1$ người ngồi quanh một bàn tròn.

2.20. Các tập $\{a; b, c\}$ với a, b, c là ba chữ số khác nhau và khác 0 và $a + b + c = 8$ là $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$. Do đó có $6 + 6 = 12$ số.

2.21. a) $5! = 120$.

Hướng dẫn. b) Nam nữ ngồi xen kẽ với nhau : *TGTGT*. Vị trí đầu (nam) có 3 cách chọn. Vị trí tiếp theo (nữ) có 2 cách. Vị trí tiếp theo (nam) có 2 cách. Vậy kết quả $3.2.2 = 12$ cách.

2.22. a) 4 pho tượng xếp vào 4 vị trí trong 6 vị trí có thứ tự. Vậy số cách sắp xếp là

$$A_6^4 = 6.5.4.3 = 360.$$

b) Đầu tiên ta chọn 6 pho tượng để bày, có $C_8^6 = 28$ cách chọn. Mặt khác có $6! = 720$ cách xếp 6 pho tượng này. Vậy có $28.720 = 20\,160$ cách.

2.23. a) Số các số có đúng 5 chữ số khác nhau là $5! = 120$. Số các số có đúng 5 chữ số khác nhau và bắt đầu bởi chữ số 1 là $4! = 24$. Do đó kết quả cần tìm là $120 - 24 = 96$.

b) $3! = 6$.

c) *Hướng dẫn.* Lập luận tương tự như câu a) cho kết quả là $5! - 2! = 118$.

2.24. a) Có $A_5^4 = 120$ số có 4 chữ số khác nhau từ tập các chữ số $\{0, 1, 3, 6, 9\}$ (có thể bắt đầu với chữ số 0). Có $A_4^3 = 24$ số có 4 chữ số bắt đầu bởi số 0. Vậy có $120 - 24 = 96$ số có 4 chữ số khác nhau.

b) Xét việc lập số lẻ $\overline{abcd}$. Chữ số $d \in \{1, 3, 9\}$ có 3 cách chọn. Chữ số a có $4 - 1 = 3$ cách chọn. Chữ số b có $5 - 2 = 3$ cách chọn và chữ số c có 2 cách chọn. Vậy có $3.3.3.2 = 54$ số lẻ.

c) Có $96 - 54 = 42$ số chẵn.

d) Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Trong tập hợp $\{0, 1, 3, 6, 9\}$ có duy nhất số 1 không chia hết cho 3. Vậy số đó chia hết cho 3 khi và chỉ khi các chữ số của nó thuộc tập $\{0, 3, 6, 9\}$. Có $4!$ số có 4 chữ số khác nhau từ $\{0, 3, 6, 9\}$ (có thể bắt đầu với chữ số 0). Có $3!$ số có 4 chữ số khác nhau từ $\{0, 3, 6, 9\}$ bắt đầu với chữ số 0. Vậy kết quả là có

$$4! - 3! = 24 - 6 = 18 \text{ số}.$$

2.25. C_n^4.

Hướng dẫn. Mỗi giao điểm của hai đường chéo ứng với một bộ bốn đỉnh của đa giác và ngược lại.

2.26. a) $C_{20}^{3} = 1140$.

b) i) Ba đỉnh liên tiếp của H xác định một tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H. Đó là các tam giác $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ..., $A_{20}A_1A_2$. Vậy có 20 tam giác như vậy.

ii) Xét một cạnh bất kì chẳng hạn A_1A_2. Bỏ đi hai đỉnh kề với nó là A_{20} và A_3; 16 đỉnh còn lại $A_4, ..., A_{19}$ sẽ cùng với A_1A_2 tạo nên 16 tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H. Vậy có cả thảy $20.16 = 320$ tam giác như vậy.

iii) Số tam giác cần tìm là $1140 - 20 - 320 = 800$.

2.27. Có hai loại tam giác.

Loại 1 : Gồm một điểm trên a và hai điểm trên b. Có $10.C_{20}^{2} = 1900$ tam giác loại 1.

Loại 2 : Gồm một điểm trên b và hai điểm trên a. Có $20.C_{10}^{2} = 900$ tam giác loại 2. Vậy cả thảy có $1900 + 900 = 2800$ tam giác.

2.28. a) $1 - 5x + \dfrac{45}{4}x^2$.

b) $3^8 - C_8^1 3^7 2x + C_8^2 3^6 4x^2$.

2.29. $-C_{20}^{3} 2^3 a^{17} x^3$.

2.30. a) $1 - 36x + 594x^2 - 5940x^3$.

b) $1 - 18x + 144x^2 - 8C_9^3 x^3 = 1 - 18x + 144x^2 - 672x^3$.

c) $1 - \dfrac{20}{3}x + \dfrac{190}{9}x^2 - \dfrac{1140}{27}x^3$.

2.31. a) $-C_{12}^{7} 2^7 x^7$; b) $-\dfrac{1}{2}C_9^5 x^5$; c) $-16C_{15}^{11}x^{11}$.

2.32. $C_{12}^{8} = 495$.

Hướng dẫn. Theo hằng đẳng thức Pa-xcan ta có

$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = C_{n+3}^{n+1} = C_{n+3}^{2} = \dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$ suy ra $(n+2)(n+3) = 14(n+3)$.

Vậy $n = 12$. Số hạng thứ k trong khai triển của biểu thức đã cho là $C_{12}^{k}x^{-3(12-k)}x^{\frac{5k}{2}}$.

Ta có phương trình $-3(12-k) + 5\frac{k}{2} = 8$. Suy ra $11k = 88$. Vậy $k = 8$.

2.33. $n = 8$.

Hướng dẫn. Có C_{2n}^{3} tam giác. Mỗi hình chữ nhật được xác định bởi việc chọn 2 trong số n đỉnh ở nửa đường tròn. Vậy có C_{n}^{2} hình chữ nhật. Ta có phương trình $20C_{n}^{2} = C_{2n}^{3}$.

2.34. Giả sử 5 quân bài này có : hai quân thuộc bộ B, hai quân thuộc bộ C và một quân thuộc bộ A. Có 13 cách chọn bộ A và tiếp theo có C_{12}^{2} cách chọn hai bộ B và C trong số 12 bộ còn lại. Với bộ A có 4 cách chọn 1 quân. Với bộ B và bộ C mỗi bộ có C_{4}^{2} cách chọn hai quân. Vậy có cả thảy $13\ C_{12}^{2}4\ C_{4}^{2}\ C_{4}^{2} = 123552$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{123552}{C_{52}^{5}}$.

2.35. $P = \frac{10240}{C_{52}^{5}}$.

Hướng dẫn. Có 10 bộ tiến liên tiếp là $(A-2-3-4-5)$, $(2-3-4-5-6)$, $(3-4-5-6-7),\ldots,(10-J-Q-K-A)$. Mỗi bộ trên có $4.4.4.4.4 = 1024$ cách chọn.

2.36. Xác suất để gieo một lần không có số chấm chẵn là $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Do đó theo quy tắc nhân ta có $P = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

2.37. a) i) $\frac{18}{38} = \frac{9}{19}$; ii) $\frac{2}{38} = \frac{1}{19}$.

b) i) $\frac{9}{19}.\frac{9}{19} = \frac{81}{361}$; ii) $\frac{6}{38}.\frac{32}{38} = \frac{3}{19}.\frac{16}{19} = \frac{48}{361} \approx 0{,}133$.

c) $\left(\frac{18}{19}\right)^5 = \frac{1889568}{2476099} \approx 0{,}763$.

2.38. a) Xác suất lấy được quả cầu màu trắng ở mỗi bình là $\frac{1}{3}$, lấy được quả cầu màu xanh ở mỗi bình là $\frac{1}{3}$ và lấy được quả cầu màu đỏ ở mỗi bình là $\frac{1}{3}$. Vậy xác suất lấy được một bộ ba quả cầu (trắng, xanh, đỏ) là $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$. Tương tự cho các bộ còn lại (trắng, đỏ, xanh),.... Có 6 bộ như vậy. Theo quy tắc nhân, xác suất cần tìm là $6.\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$.

b) Xác suất rút được bộ ba quả cầu (trắng, trắng, trắng) là $\frac{1}{27}$. Tương tự cho các bộ (xanh, xanh, xanh) và (đỏ, đỏ, đỏ). Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$.

c) $1-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

2.39. a) $\frac{C_{11}^3}{C_{13}^3}=\frac{15}{26}$. b) $1-\frac{15}{26}=\frac{11}{26}$. c) $\frac{11}{C_{13}^3}=\frac{1}{26}$.

2.40. a) i) $\frac{1}{C_{16}^3}=\frac{1}{560}$; ii) $\frac{C_{13}^3}{C_{16}^3}=\frac{143}{280}$; iii) $\frac{7.6.3}{C_{16}^3}=\frac{9}{40}$.

b) i) $\frac{C_7^1C_9^3}{C_{16}^4}=\frac{21}{65}$; ii) $\frac{C_7^2C_9^2}{C_{16}^4}=\frac{27}{65}$.

c) $\frac{C_7^5C_6^3C_3^2}{C_{16}^{10}}=\frac{45}{286}$.

2.41. a) Tích hai số là lẻ khi mà cả hai số đều lẻ. Số cách chọn hai số trong 5 số lẻ là $C_5^2=\frac{5.4}{2}=10$. Như vậy ta có $P=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

b) $1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

2.42. a) $\frac{C_6^2}{C_9^5}=\frac{5}{42}$. b) $\frac{C_3^1C_6^4}{C_9^5}=\frac{5}{14}$. c) $\frac{C_6^5}{C_9^5}=\frac{1}{21}$.

2.43. Số cách xếp 8 người quanh bàn tròn là 7! (xem bài 2.19). Có hai cách xếp hai vợ chồng cạnh nhau. Có 6! cách xếp 6 người còn lại. Vậy xác suất cần tìm là

$$\frac{2.6!}{7!} = \frac{2}{7}.$$

2.44. Số trường hợp có thể là $C_{11}^3 = 165$.

a) Các bộ (a, b, c) mà $a + b + c = 12$ và $a < b < c$ là (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6) và (3, 4, 5). Vậy $P = \frac{7}{C_{11}^3} = \frac{7}{165}$.

b) Tổng $a + b + c$ lẻ khi và chỉ khi : hoặc cả ba số đều lẻ hoặc trong ba số có 1 số lẻ và 2 số chẵn. Ta có $C_6^3 = 20$ cách chọn 3 số lẻ từ tập 6 số lẻ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ và có $C_6^1C_5^2 = 60$ cách chọn 1 số lẻ và 2 số chẵn. Vậy $P = \frac{20+60}{165} = \frac{16}{33}$.

2.45. Gọi A là biến cố "không có chữ số 1" ; B là biến cố "không có chữ số 5". Dễ thấy $P(A) = P(B) = (0,9)^5$ và $P(AB) = (0,8)^5$.

Từ đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2(0,9)^5 - (0,8)^5 = 0,8533$.

2.46. Anh ta trở lại điểm xuất phát khi và chỉ khi trong 4 bước, anh ta có 2 lần bước tiến và 2 lần bước lùi. Dễ thấy có 6 trường hợp để trong 4 bước có 2 tiến, 2 lùi ($T–T–L–L$, $T–L–T–L$, $L–L–T–T$, $L–T–L–T$, $T–L–L–T$, $L–T–T–L$). Mỗi bước tiến hay lùi đều có xác suất là $\frac{1}{2}$, nên mỗi trường hợp có xác suất là

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Thành thử xác suất cần tìm là $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

2.47. Xét biến cố đối "ba người có ngày sinh đôi một khác nhau". Số trường hợp có thể là 365^3. Số trường hợp thuận lợi là 365.364.363.

Vậy $P = 1 - \frac{365.364.363}{365^3} \approx 1 - 0,9918 \approx 0,0082$.

2.48. $P = \frac{3.2.3}{C_8^3} = \frac{9}{28}$.

2.49. a) $\frac{C_4^2C_4^2}{C_{10}^4} \approx 0,1714$. b) $\frac{C_2^1C_4^2C_4^1}{C_{10}^4} \approx 0,229$.

2.50. a) Gọi A_i là biến cố "lần gieo thứ i cho ta mặt 6 chấm", (i = 1, 2, 3). H là biến cố "có đúng một lần gieo súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Ta có : $H = A_1\overline{A_2A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1A_2}A_3$;

$$P(X=1) = P(H) = P(A_1\overline{A_2A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1A_2}A_3)$$

$$= \frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}.$$

Tương tự

$$P(X=2) = \frac{15}{216} \text{ ; } P(X=3) = \frac{1}{216}.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b) $E(X) = 0{,}5$; $V(X) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

2.51. a) Bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

b) $E(X) = 1{,}2$; $V(X) = 0{,}72$.

2.52. Bảng phân bố xác suất của X như sau

X	5 900 000	400 000	900 000	–100 000
P	0,0015	0,0485	0,0285	0,9215

$E(X) = -38250$. Vậy công ti bảo hiểm thu lời trung bình là 38 250 đồng mỗi năm từ anh Bình.

2.53. a) Xác suất để An đạt điểm giỏi cả 4 môn thi là 0,9. 0,7. 0,8. 0,6 = 0,3024. Do đó số tiền thưởng trung bình theo phương án của bố là 90 000.0,3024 = 27 216 đồng.

b) Số tiền thưởng trung bình theo phương án của mẹ là

0,9.10 000 + 0,7.10 000 + 0,8.10 000 + 0,6.10 000 = 30 000 đồng.

2.54. i) Câu trả lời đúng là (B) :

Có 2.4.4.3 = 96 miếng gỗ.

ii) Câu trả lời đúng là (A).

Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn. Với hai tiêu chuẩn : "chất liệu ; cỡ" thì có 1.2 = 2 miếng khác ở đúng hai tiêu chuẩn này. Với hai tiêu chuẩn : "chất liệu ; màu" có 1.3 = 3 miếng khác ở đúng hai tiêu chuẩn này. Tương tự với hai tiêu chuẩn "chất liệu ; dạng" có 1.3 = 3 miếng ; Với hai tiêu chuẩn "cỡ ; màu" có 2.3 = 6 miếng. Với hai tiêu chuẩn "cỡ ; dạng" có 2.3 = 6 miếng. Với hai tiêu chuẩn "màu ; dạng" có 3.3 = 9 miếng.

Tóm lại có 2 +3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29 miếng.

2.55. Câu trả lời đúng là (C).

Nếu mỗi người đều bắt tay với mọi người thì có C_{26}^2 cái bắt tay trong đó có C_{13}^2 cái bắt tay giữa các bà và 13 cái bắt tay giữa hai vợ chồng.

Vậy theo điều kiện bài toán chỉ có $C_{26}^2 - C_{13}^2 - 13 = 234$ cái bắt tay.

2.56. Câu trả lời đúng là (C).

Hướng dẫn. Một tập con ba phần tử của tập hợp $\{1, 2,\ldots,9\}$ tương ứng với một số có ba chữ số đơn điệu tăng. Một tập con ba phần tử của $\{0, 1, 2,\ldots,9\}$ tương ứng với một số có ba chữ số đơn điệu giảm.

Vậy có $C_9^3 + C_{10}^3 = 204$ số cần tìm.

2.57. Câu trả lời đúng là (C).

Hướng dẫn. Đầu tiên ta xếp 6 học sinh ngồi. Có 6! = 720 cách xếp. Với mỗi cách sắp xếp 6 học sinh sẽ tạo ra 5 khe hở. Vậy có 5.4.3 = 60 cách xếp chỗ cho 3 thầy. Theo quy tắc nhân có 720.60 = 43 200.

2.58. Câu trả lời đúng là (D).

Hướng dẫn. Số trường hợp có thể : $C_{11}^6 = 462$. Để tổng lẻ thì số các số lẻ phải lẻ. Có 6 số lẻ 1, 3, 5, 7, 9, 11 và 5 số chẵn 2, 4, 6, 8, 10.

Có 6 cách chọn 1 số lẻ, 5 số chẵn. Có $C_6^3C_5^3 = 200$ cách chọn 3 số lẻ, 3 số chẵn.

Có $C_6^5C_5^1 = 30$ cách chọn 5 số lẻ 1 số chẵn. Vậy số trường hợp thuận lợi là :

$$6 + 200 + 30 = 236. \text{ Vậy } P = \frac{236}{462} = \frac{118}{231}.$$

2.59. Câu trả lời đúng là (C).

Hướng dẫn. Số trường hợp có thể : $C_{10}^6 = 210$. Có hai số bé hơn 3 và 7 số lớn hơn 3. Ta cần chọn 1 số bé hơn 3 và 4 số lớn hơn 3. Số cách là $C_2^1 C_7^4 = 70$.

Vậy $P = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$.

2.60. Câu trả lời đúng là (C).

Hướng dẫn. Có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố đang xét là : (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2). Vậy $P = \frac{7}{27}$.

2.61. Câu trả lời đúng là (B)

Hướng dẫn. Các kết quả thuận lợi cho biến cố đang xét là (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 2, 4), (3, 1, 4), (1, 3, 4), (4, 1, 5), (1, 4, 5), (3, 2, 5), (2, 3, 5), (5, 1, 6), (1, 5, 6), (4, 2, 6), (2, 4, 6), (3, 3, 6). Vậy $P = \frac{15}{216}$.

2.62. *Hướng dẫn.* Tổng $S = \sum \overline{abcde} = 10^4 \sum a + 10^3 \sum b + 10^2 \sum c + 10 \sum d + \sum e$.

Ta có tổng $\sum a$ là tổng của 120 số, trong đó mỗi số $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ xuất hiện đúng $4! = 24$ lần. Vậy $\sum a = 24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 360$. Tương tự

$$\sum b = \sum c = \sum d = \sum e = 360.$$

Vậy $S = 360.11111 = 3\,999\,960$.

2.63. Số các đoạn thẳng cần tìm là C_n^2.

2.64. *Giải.* Xét các số có 8 chữ số (kể cả chữ số 0 đứng đầu) : Có $C_8^3 = 56$ cách chọn 3 vị trí cho chữ số 9. 5 vị trí còn lại có $5! = 120$ cách xếp các chữ số 0, 2, 4, 6, 8. Vậy có $56.120 = 6720$ số.

Xét các số có 8 chữ số có chữ số 0 đứng đầu. Có $C_7^3 = 35$ cách chọn 3 vị trí cho chữ số 9, 4 vị trí còn lại có $4! = 24$ cách xếp các chữ số 2, 4, 6, 8.

Vậy có $35.24 = 840$ số. Thành thử số số cần tìm là $6720 - 840 = 5880$.

2.65. *Hướng dẫn.* Có C_{2n}^2 cách chọn 2 người xếp vào nhà dân thứ nhất, rồi $C_{2(n-1)}^2$ cách chọn 2 người trong số $2(n-1)$ người còn lại xếp vào nhà dân thứ hai,... . Theo quy tắc nhân có cả thảy $C_{2n}^2 C_{2(n-1)}^2 \cdots C_4^2 C_2^2 = \frac{(2n)!}{2^n}$ cách.

2.66. *Hướng dẫn.* Nếu các cặp này có phân biệt thứ tự (cặp thứ nhất, thứ hai,..., thứ sáu) thì theo bài toán **2.63** có $\frac{12!}{2^6}$ cách ghép. Nhưng vì các cặp này không phân biệt thứ tự nên mỗi cách ghép được tính lặp đúng 6! lần. Do vậy số phải tìm là $\frac{12!}{2^6 6!} = 10\,395$.

2.67. *Hướng dẫn.* Ta có số hạng tổng quát trong khai triển là

$$C_{21}^k b^{\frac{k}{2}} a^{-\frac{k}{6}} a^{\frac{(21-k)}{3}} b^{\frac{(k-21)}{6}} = C_{21}^k a^{\frac{(42-3k)}{6}} b^{\frac{(4k-21)}{6}}.$$

Vậy ta phải có $42 - 3k = 4k - 21$. Suy ra $k = 9$.

2.68. *Giải.* Khai triển $(x+2)^n$ theo luỹ thừa giảm của x là

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} 2^k.$$

Do đó ta phải có $C_n^9 2^9 > C_n^8 2^8$ và $C_n^9 2^9 > C_n^{10} 2^{10}$ hay $2(n-8) > 9$ và $10 > 2(n-9)$.

Từ đó $12{,}5 < n < 14$. Suy ra $n = 13$.

2.69. *Hướng dẫn.* Ta tính xác suất để mục tiêu không bị trúng đạn tức là khi cả 4 khẩu pháo đều bắn trượt. Xác suất đó là $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{5}.\frac{2}{7} = \frac{1}{105}$. Suy ra xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là $1 - \frac{1}{105} = \frac{104}{105}$.

2.70. a) Bảng phân bố xác suất của X như sau

X	0	5	10	15	20
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

b) $E(X) = 4$; $V(X) = 16$.

2.71. *Hướng dẫn.* Gọi X là số động cơ gặp sự cố.

Ta có $P(X = 0) = 0{,}9.\ 0{,}9.\ 0{,}9.\ 0{,}9 = 0{,}6561$.

$P(X = 1) = 4.\ 0{,}1.\ 0{,}9.\ 0{,}9.\ 0{,}9 = 0{,}2916$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}9477$.

2.72. *Hướng dẫn*

a) $E(X) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1$, $E(Y) = 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}45 + 0{,}2 = 1{,}75$.

b) Số dân tăng trung bình là $1{,}75 - 1 = 0{,}75$.

CHƯƠNG 3 DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương pháp quy nạp

Để chứng minh mệnh đề chứa biến nguyên dương $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi số nguyên $n \geq p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ cho trước) bằng phương pháp quy nạp, cần thực hiện hai bước sau :

Bước 1 (bước cơ sở). Chứng minh $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = p$.

Bước 2 (bước quy nạp). Với k là một số nguyên dương tuỳ ý lớn hơn hoặc bằng p, xuất phát từ giả thiết $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = k$ chứng minh $A(n)$ cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

2. Dãy số

a) Các định nghĩa

• Dãy số vô hạn : Là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$.

• Dãy số hữu hạn : Là một hàm số xác định trên tập hợp m số nguyên dương đầu tiên (m là số nguyên dương cho trước).

• Dãy số tăng : (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n > 0$.

• Dãy số giảm : (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n < 0$.

• Dãy số không đổi : (u_n) là dãy số không đổi $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} - u_n = 0$.

• Dãy số bị chặn trên : Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số bị chặn dưới : Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số bị chặn : Là dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

• Cấp số cộng : (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} = u_n + d$ (d là hằng số và được gọi là công sai).

• Cấp số nhân : (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} = u_n.q$ (q là hằng số và được gọi là công bội).

b) Các tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân

• Định lí về ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng :

(u_n) là cấp số cộng $\Rightarrow u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ $(k \geq 2)$.

• Công thức của số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) :

$u_n = u_1 + (n-1)d$ (d là công sai).

• Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) :

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \text{ hay } S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

• Định lí về ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân :

(u_n) là cấp số nhân $\Rightarrow u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ $(k \geq 2)$.

• Công thức của số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) :

$u_n = u_1 . q^{n-1}$ (q là công bội).

• Công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $q \neq 1$:

$$S_n = u_1 . \frac{1-q^n}{1-q}.$$

B – ĐỀ BÀI

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

3.1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có các đẳng thức sau :

$$1.2 + 2.5 + \ldots + n.(3n-1) = n^2(n+1).$$

3.2. Cho số thực $x \neq k2\pi$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

3.3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có các bất đẳng thức sau :

a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$;

b) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$.

3.4. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

a) $n(2n^2 - 3n + 1)$ chia hết cho 6.

b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

3.5. Cho số nguyên dương n và cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Chứng minh rằng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

3.6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có các bất đẳng thức sau :

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$;

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n$.

3.7. Cho số nguyên $n \geq 2$ và cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thuộc khoảng $(0 ; 1)$. Chứng minh rằng

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n.$$

§2. DÃY SỐ

3.8. Hãy tính 6 số hạng đầu tiên của mỗi dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - 2^n$;

b) Dãy số (v_n) với $v_n = \frac{3^n}{n^3}$.

3.9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\frac{n\pi}{4} + \cos^2\frac{2n\pi}{3}$.

Hãy điền các số thích hợp vào các ô trống của bảng dưới đây :

n	1	2	3	4	5
u_n					

3.10. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đồ thị ($\mathscr{C}$) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x^2+1}$.

Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị ($\mathscr{C}$) và đường thẳng $x = n$.

Xét dãy số (u_n) với u_n là tung độ của điểm A_n. Hãy tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số đó.

3.11. Cho các dãy số (u_n) và (v_n), xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = 3u_n + 10 \text{ với mọi } n \geq 1 ;$$

$$v_1 = 5, v_2 = 0 \text{ và } v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Hãy điền các số thích hợp vào các ô trống của bảng dưới đây :

n	3	5	7
u_n			
v_n			

3.12. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5.\,4^{n-1} + 3$.

a) Chứng minh rằng $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với mọi $n \geq 1$.

b) Dựa vào kết quả của phần a), hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

3.13. Cho các dãy số (u_n) và (v_n), với $u_n = n$ và $v_n = 2^n + n$.

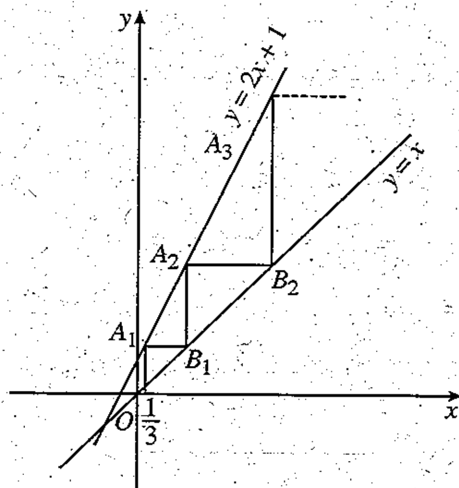
a) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta luôn có

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \text{ và } v_{n+1} = 2v_n - n + 1.$$

b) Em có thể rút ra nhận xét gì từ kết quả đã chứng minh được ở phần a) ?

3.14. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đồ thị ($\mathscr{C}$) của hàm số $y = 2x + 1$. Trên ($\mathscr{C}$) lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$. Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng Δ chứa đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại điểm B_1 ; gọi A_2 là giao điểm của ($\mathscr{C}$) với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2, lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm

A_1 ta sẽ được điểm A_3. Với điểm A_3, lại làm như thế ta được điểm A_4. Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ được một dãy vô hạn các điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ nằm trên đồ thị $(\mathscr{C})$. (h.3.1).



Hình 3.1

Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n là hoành độ của điểm A_n. Hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

3.15. Hãy xét tính tăng – giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 2n^3 - 5n + 1$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = 3^n - n$;

c) Dãy số (c_n) với $c_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

3.16. Hãy xét tính tăng – giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$;

b) Dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$;

c) Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

3.17. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$.

3.18. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau :

a) Dãy số (a_n) với $a_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$;

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$.

3.19. Hãy xác định số thực a để dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{an^2 + 1}{2n^2 + 3}$, là :

a) Một dãy số giảm ;

b) Một dãy số tăng.

3.20. Chứng minh rằng dãy số (v_n), với $v_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$, là một dãy số bị chặn.

3.21. Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$, là một dãy số tăng và bị chặn.

3.22. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{3} + \cos\dfrac{n\pi}{6}$.

a) Hãy tính u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+12}$ với mọi $n \geq 1$.

3.23. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin(2n-1)\dfrac{\pi}{3}$.

a) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 17 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

3.24. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 1 \text{ và } v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính v_2, v_3 và v_4.

b) Chứng minh rằng $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

3.25. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 7 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = 7n - 6$ với mọi $n \geq 1$.

3.26. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 2 \text{ và } v_{n+1} = 5v_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính v_2, v_4 và v_6.

b) Chứng minh rằng $v_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

3.27. Với dãy số (u_n) cho ở bài tập 3.11, chứng minh rằng

$$u_n = 2.3^n - 5$$

với mọi $n \geq 1$.

3.28. Cho dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_1 = 2 \text{ và } v_{n+1} = 3v_n + 2n - 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $v_n = 3^n - n$ với mọi $n \geq 1$.

3.29. Cho dãy số (u_n), xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{4} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số không đổi.

§3. CẤP SỐ CỘNG

3.30. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 6$.

a) Hãy tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

b) Tính u_3, u_4, u_5 và u_6.

3.31. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng ? Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3 + a_n$ với mọi $n \geq 1$;

b) Dãy số (b_n) xác định bởi $b_1 = 3$ và $b_{n+1} = b_n - n$ với mọi $n \geq 1$;

c) Dãy số (c_n) mà $c_{n+1} = c_n + 2$ với mọi $n \geq 1$.

3.32. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = 3x - 2$.

Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C})$ và đường thẳng $x = n$.

Xét dãy số (u_n) với u_n là tung độ của điểm A_n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

3.33. Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = 5 - u_n$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a là một số thực.

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (u_n) là một cấp số cộng.

3.34. Cho một cấp số cộng có 5 số hạng. Biết rằng số hạng thứ hai bằng 3 và số hạng thứ tư bằng 7. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó.

3.35. Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng của số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Hãy tìm cấp số cộng đó.

3.36. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = -3$.

Trên mặt phẳng toạ độ, lấy các điểm $A_1, A_2, \ldots$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, điểm A_n có toạ độ là $(n;\ u_n)$. Chứng minh rằng tất cả các điểm A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, cùng nằm trên một đường thẳng. Hãy cho biết phương trình của đường thẳng đó.

3.37. Cho một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết rằng hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

3.38. Cấp số cộng (u_n) có $u_{17} - u_{20} = 9$ và $u_{17}^2 + u_{20}^2 = 153$. Hãy tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

3.39. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d > 0$, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

3.40. Cho cấp số cộng (u_n) và cho các số nguyên dương m, k với $m < k$. Chứng minh rằng

$$u_k = \frac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2}.$$

Áp dụng. Hãy tìm một cấp số cộng có 7 số hạng mà số hạng thứ ba bằng 2 và tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 10.

3.41. Hãy tính các tổng sau đây :

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 102, số hạng thứ hai bằng 105 và số hạng cuối bằng 999.

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu bằng $\frac{1}{3}$, số hạng thứ hai bằng $-\frac{1}{3}$ và số hạng cuối bằng -2007.

3.42. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 + u_{19} = 90$. Hãy tính tổng 23 số hạng đầu tiên của (u_n).

3.43. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$. Hãy tính tổng 346 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

3.44. Cho cấp số cộng tăng (u_n) có $u_1^3 + u_{15}^3 = 302\,094$ và tổng 15 số hạng đầu tiên bằng 585. Hãy tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

§4. CẤP SỐ NHÂN

3.45. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = 2$.

a) Hãy tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

b) Hãy tính u_3, u_4, u_5 và u_6.

3.46. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \frac{a_n}{7}$ với mọi $n \geq 1$;

b) Dãy số (b_n) xác định bởi $b_1 = 3$ và $b_{n+1} = \frac{b_n}{n}$ với mọi $n \geq 1$;

c) Dãy số (c_n) xác định bởi $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = \frac{6}{c_n}$ với mọi $n \geq 1$.

d) Dãy số (d_n) mà $d_{n+1} = 3d_n$ với mọi $n \geq 1$.

3.47. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 4u_n + 9$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy số (v_n), xác định bởi

$$v_n = u_n + 3 \text{ với mọi } n \geq 1,$$

là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

3.48. Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{12}{u_n}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a là một số thực khác 0.

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

3.49. Cho một cấp số nhân có 5 số hạng với công bội dương. Biết rằng số hạng thứ hai bằng 3 và số hạng thứ tư bằng 6. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

3.50. Một cấp số nhân có 7 số hạng với số hạng đầu và công bội là các số âm. Biết rằng tích của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 5 184, tích của số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 746 496. Hãy tìm cấp số nhân đó.

3.51. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC.

Xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh 1 và với mỗi số nguyên $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$.

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu r_n tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_nB_nC_n$.

Chứng minh rằng dãy số (r_n) là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

3.52. Cho một cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ bảy gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

3.53. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$ và $u_3 + u_5 = 272$. Hãy tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

3.54. Cho cấp số nhân (u_n) có $6u_2 + u_5 = 1$ và $3u_3 + 2u_4 = -1$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

3.55. Cho cấp số nhân (u_n) và cho các số nguyên dương m, k với $m < k$. Chứng minh rằng

$$|u_k| = \sqrt{u_{k-m} \cdot u_{k+m}}.$$

Áp dụng. Hãy tìm một cấp số nhân với công bội âm, có 7 số hạng, số hạng thứ ba bằng 2 và tích của số hạng đầu với số hạng cuối bằng 18.

3.56. Hãy tính các tổng sau :

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu bằng $\sqrt{2}$, số hạng thứ hai bằng -2 và số hạng cuối bằng $64\sqrt{2}$;

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có 11 số hạng, số hạng đầu bằng $\frac{4}{3}$ và số hạng cuối bằng $\frac{81}{256}$.

3.57. Cho cấp số nhân (u_n) có $8u_2 - 5\sqrt{5}.u_5 = 0$ và $u_1^3 + u_3^3 = 189$. Hãy tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

3.58. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \in (0 ; 1)$. Hãy tính tổng 25 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó, biết rằng $u_1 + u_3 = 3$ và $u_1^2 + u_3^2 = 5$.

3.59. Cho cấp số nhân (u_n) có $3\sqrt{3}.u_2 + u_5 = 0$ và $u_3^2 + u_6^2 = 63$. Hãy tính tổng

$$S = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_{15}|.$$

3.60. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_{n+1} = 3.u_n^2 - 10 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

3.61. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$; đồng thời, các số x, $2y$, $3z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Hãy tìm q.

3.62. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân ; đồng thời, chúng lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín của một cấp số cộng. Hãy tìm ba số đó, biết rằng tổng của chúng bằng 13.

3.63. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân ; ba số $x, y-4, z$ theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân ; đồng thời, các số $x, y-4, z-9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm x, y, z.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các bài từ 3.64 đến 3.67, hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho

3.64. Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$a_1 = 321$ và $a_n = a_{n-1} - 3$ với mọi $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Tổng 125 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n) là :

(A) 16 875 ; (B) 63 375 ;

(C) 63 562,5 ; (D) 16 687,5.

3.65. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 12 \text{ và } x_n = \frac{x_{n-1}}{3} \text{ với mọi } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là :

(A) $\dfrac{28697812}{1594323}$; (B) $\dfrac{28697813}{1594323}$;

(C) $\dfrac{7174453}{398581}$; (D) $\dfrac{28697813}{1594324}$.

3.66. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} là :

(A) 242 ; (B) 235 ;

(C) 11 ; (D) 4.

3.67. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 24$ và $\dfrac{u_4}{u_{11}} = 16384$. Số hạng u_{17} là :

(A) $\dfrac{3}{67108864}$; (B) $\dfrac{3}{268435456}$;

(C) $\dfrac{3}{536870912}$; (D) $\dfrac{3}{2147483648}$.

3.68. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \frac{1}{3} \text{ và } u_{n+1} = 4u_n + 7 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính u_2, u_3, u_4, u_5 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = \dfrac{2^{2n+1} - 7}{3}$ với mọi $n \geq 1$.

3.69. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \cos(3n + 1)\dfrac{\pi}{6}$.

a) Chứng minh rằng $u_n = u_{n+4}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 27 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

3.70. Hãy xét tính đơn điệu của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + \dfrac{1}{5^n}$;

b) Dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{2^n.\sqrt{n}}{3^n}$.

3.71. Cho dãy số (u_n) mà tổng n số hạng đầu tiên của nó, kí hiệu là S_n, được tính theo công thức sau :

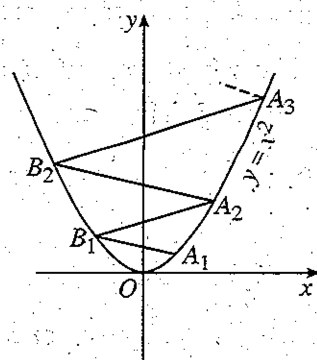
$$S_n = \frac{n(7 - 3n)}{2}.$$

a) Hãy tính u_1, u_2 và u_3.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.

3.72. Trong mặt phẳng toạ độ, trên parabol $y = x^2$ lấy dãy các điểm (A_n) và (B_n) sao cho điểm A_1 có hoành độ dương và với mỗi số nguyên dương n, đường thẳng A_nB_n có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{5}$ và đường thẳng B_nA_{n+1} có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. (h.3.2).



Hình 3.2

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là hoành độ của A_n và B_n.

Chứng minh rằng các dãy số (a_n) và (b_n) là các cấp số cộng. Hãy xác định công sai và số hạng tổng quát của mỗi cấp số cộng đó.

3.73. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), mà $v_n = u_n^2$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{1001}^2$.

3.74. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Xét dãy số (v_n), mà $v_n = u_{n+1} - u_n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương N, tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n) bằng $u_{N+1} - u_1$.

b) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

3.75. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Xét dãy số (v_n), mà $v_n = u_{n+1} - u_n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b) Cho số nguyên dương N, hãy tính tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n) theo N. Từ đó, hãy suy ra số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

3.76. Cho dãy số (u_n) mà tổng n số hạng đầu tiên của nó (kí hiệu là S_n) được tính theo công thức sau :

$$S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}.$$

a) Hãy tính u_1, u_2 và u_3.

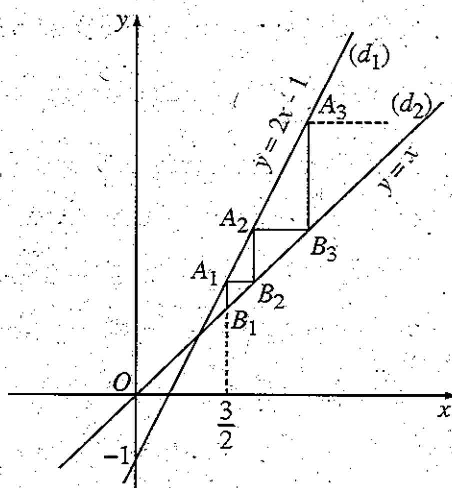
b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số nhân. Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

3.77. Trong mặt phẳng toạ độ, cho các đường thẳng (d_1) và (d_2) tương ứng là đồ thị của các hàm số $y = 2x - 1$ và $y = x$.

Xây dựng dãy các điểm (A_n) nằm trên (d_1) và dãy các điểm (B_n) nằm trên (d_2) theo cách sau (h.3.3) :

- A_1 và B_1 tương ứng là giao điểm của đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ với (d_1) và (d_2) ;
- Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, B_n là giao điểm của (d_2) với đường thẳng đi qua A_{n-1} và song song với trục hoành, A_n là giao điểm của (d_1) với đường thẳng đi qua B_n và song song với trục tung.



Hình 3.3

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n là hoành độ của điểm A_n và h_n là độ dài của đoạn thẳng A_nB_n.

a) Chứng minh rằng dãy số (h_n) là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

b) Dựa vào kết quả phần a), hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

3.78. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = \frac{1}{3} \text{ và } u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), mà $v_n = \frac{u_n}{n}$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Tính tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \ldots + \frac{u_{11}}{11}$.

3.79. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = 6u_n - 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), mà $v_n = u_n - \frac{1}{5}$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

c) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

3.80. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng khác 0 và

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49.\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35. \end{cases}$$

Hãy tìm u_1.

3.81. Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ; đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

3.82. Các số $x + 5y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ; đồng thời, các số $(y - 1)^2$, $xy - 1$, $(x + 2)^2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

3.83. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$, và cho số nguyên dương N. Hãy tính tổng sau :

$$S_N = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{u_N - 1}.$$

C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

3.1. Ta sẽ chứng minh

$$1.2 + 2.5 + ... + n.(3n - 1) = n^2(n + 1) \quad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $1.2 = 2 = 1^2.(1 + 1)$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là giả sử đã có

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) = k^2(k + 1),$$

ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) + (k + 1)(3k + 2) = (k + 1)^2.(k + 2).$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$1.2 + 2.5 + ... + k.(3k - 1) + (k + 1)(3k + 2) = k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2)$$

$$= (k + 1)(k^2 + 3k + 2)$$

$$= (k + 1)(k + 1)(k + 2) = (k + 1)^2.(k + 2).$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, vì $x \neq k2\pi$ (theo giả thiết) nên $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{(1+1)x}{2}\cos\frac{1.x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$1+\cos x+\cos 2x+...+\cos kx+\cos(k+1)x=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}+\cos(k+1)x.\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\cos\frac{kx}{2}-2\sin^2\frac{(k+1)x}{2}.\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\left(\cos\frac{kx}{2}-2\sin\frac{(k+1)x}{2}.\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\left(\cos\frac{kx}{2}+\cos\frac{(k+2)x}{2}-\cos\frac{kx}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+3)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+2)x}{2}\cos\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3. a) Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1 \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$

Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1,$$

ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}$$

$$>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}>1 \quad \text{(theo giả thiết quy nạp).}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}} \qquad (2)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}=\frac{3}{8}<\frac{1}{\sqrt{3.1+4}} \quad (\text{vì } 9.7 = 63 < 64 = 8^2).$$

Như vậy, (2) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (2) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k+1}{2k+2}.\frac{2k+3}{2k+4} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\frac{2k+3}{2k+4} \qquad (3)$$

Lại có : $(2k+3)^2.(3k+7) < (2k+3)^2.(3k+7) + k + 1 = (3k+4)(2k+4)^2$.

Do đó : $\dfrac{1}{\sqrt{3k+4}}.\dfrac{2k+3}{2k+4} < \dfrac{1}{\sqrt{3k+7}}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k+1}{2k+2}.\frac{2k+3}{2k+4} < \frac{1}{\sqrt{3k+7}},$$

nghĩa là ta cũng có (2) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.4. a) Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$n(2n^2 - 3n + 1) \vdots 6 \qquad (1)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, ta có $n(2n^2 - 3n + 1) = 0$. Hiển nhiên $0 \vdots 6$, và vì thế (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $k(2k^2 - 3k + 1) \vdots 6$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, do $(k+1)[2(k+1)^2 - 3(k+1) + 1] = k(2k^2 - 3k + 1) + 6k^2$ nên từ giả thiết quy nạp suy ra $(k+1)[2(k+1)^2 - 3(k+1) + 1] \vdots 6$, nghĩa là (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Ta sẽ chứng minh

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} \vdots 133 \qquad (2)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11^2 + 12 = 133$. Vì thế (2) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (2) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, ta có

$$11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} = 11.(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 12^{2k-1}.(12^2 - 11)$$
$$= 11.(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133.12^{2k-1}. \quad (3)$$

Mà $11^{k+1} + 12^{2k-1} \vdots 133$ (theo giả thiết quy nạp) nên từ (3) suy ra

$$11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} \vdots 133,$$

nghĩa là (2) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3.5. Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Kí hiệu bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài bởi (1).

Với $n = 1$, theo giả thiết của bài toán ta có $x_1 = 1$. Vì thế, ta có (1) đúng khi $n = 1$.

Với $n = 2$, xét hai số thực dương tuỳ ý x_1, x_2 thoả mãn điều kiện

$$x_1x_2 = 1. \quad (2)$$

Hiển nhiên, trong hai số x_1, x_2 phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tổng quát, giả sử $x_1 \le 1$ và $x_2 \ge 1$. Khi đó, ta có

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \ge 0.$$

Suy ra $x_1 + x_2 \ge 1 + x_1x_2 \ge 2$ (do (2)). Điều này chứng tỏ (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \ge 2$, tức là giả sử với k số thực dương tuỳ ý $x_1, x_2, \ldots, x_k$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2\ldots x_k = 1$ ta luôn có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \ge k.$$

Xét $k + 1$ số thực dương tuỳ ý $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ thoả mãn điều kiện

$$x_1x_2\ldots x_kx_{k+1} = 1.$$

Vì k số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_kx_{k+1}$ có tích bằng 1 nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \ge k. \quad (3)$$

Hơn nữa, dễ thấy trong $k + 1$ số $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tổng quát, giả sử $x_k \le 1$ và $x_{k+1} \ge 1$. Khi đó, ta có

$$(1 - x_k)(x_{k+1} - 1) \ge 0 \text{ hay } x_k + x_{k+1} \ge 1 + x_kx_{k+1}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geq k + 1.$$

Như thế, ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra ta có (1) đúng với n là một số nguyên dương tuỳ ý.

3.6. a) Ta sẽ chứng minh

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \qquad (1)$$

với mọi $n \geq 2$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, hiển nhiên ta có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$. Vì thế, (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 2$. Khi đó, ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \qquad (2)$$

Mà $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ (dễ thấy), nên từ (2) suy ra

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1},$$

nghĩa là ta cũng có (1) đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \geq 2$.

b) *Hướng dẫn.* Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.7. Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Kí hiệu bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài bởi (1).

Với $n = 2$, xét hai số thực tuỳ ý $a_1, a_2 \in (0 ; 1)$ ta có

$$(1 - a_1)(1 - a_2) = 1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2 > 1 - a_1 - a_2 \text{ (do } a_1 a_2 > 0).$$

Như thế, (1) đúng khi $n = 2$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 2$.

Xét $k + 1$ số thực tuỳ ý $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ thuộc khoảng $(0 ; 1)$.

Vì k số $a_1, a_2, \ldots, a_k$ thuộc khoảng $(0 ; 1)$ nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k) > 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k.$$

Từ đó, vì $1 - a_{k+1} > 0$, suy ra

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k)(1 - a_{k+1}) > (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k)(1 - a_{k+1}). \quad (2)$$

Lại có

$$(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k)(1 - a_{k+1})$$
$$= 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1} + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)a_{k+1}$$
$$> 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1}. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_k)(1 - a_{k+1}) > 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_k - a_{k+1}.$$

Như vậy, (1) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Từ các chứng minh trên suy ra ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài.

3.8. Học sinh tự giải.

3.9. Học sinh tự giải.

3.10. Vì A_n nằm trên đường thẳng $x = n$ nên hoành độ của nó bằng n. Vì A_n nằm trên đồ thị ($\mathscr{C}$) nên tung độ u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = \frac{2n-1}{2n^2+1}.$$

3.11. Học sinh tự giải.

3.12. *Giải.* a) Ta có : $u_{n+1} = 5.4^n + 3 = 4.5.4^{n-1} + 3$

$$= 4.(5.4^{n-1} + 3) - 9 = 4u_n - 9 \ (\forall n \geq 1).$$

b) Theo công thức xác định u_n, ta có $u_1 = 5.4^{1-1} + 3 = 8$. Vì thế, kết hợp với kết quả của phần a) suy ra ta có thể cho dãy số (u_n) bởi

$$u_1 = 8 \text{ và } u_{n+1} = 4u_n - 9 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

3.13. a) *Giải.* Ta có : $u_{n+1} = n + 1 = 2n - n + 1 = 2u_n - n + 1 \ (\forall n \geq 1)$;

$$v_{n+1} = 2^{n+1} + n + 1 = 2.(2^n + n) - n + 1 = 2v_n - n + 1 \ (\forall n \geq 1).$$

b) Học sinh tự rút ra nhận xét.

3.14. *Hướng dẫn*

- Phương trình của đường thẳng $\Delta : y = x$.
- Với mỗi $n \geq 1$, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là tung độ của điểm A_n và điểm B_n. Khi đó :

– Do A_n nằm trên ($\mathscr{C}$) nên $a_n = 2u_n + 1$;

– Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_n và song song với trục hoành nên $b_n = a_n = 2u_n + 1$;

– Do B_n nằm trên đường thẳng đi qua A_{n+1} và song song với trục tung nên hoành độ của nó bằng u_{n+1}.

Từ đó, do B_n nằm trên Δ nên $u_{n+1} = b_n = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

• Vậy, dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{3}$ và $u_{n+1} = 2u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

3.15. a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1] - (2n^3 - 5n + 1) \\ &= 2.[(n+1)^3 - n^3] - 5.(n+1-n) \\ &= 2.[(n+1)^2 + (n+1).n + n^2] - 5 \\ &= 6n^2 + 6n - 3 = 3.(n^2 - 1) + 3n^2 + 6n > 0 \text{ (do } n \geq 1). \end{aligned}$$

Vì thế, dãy số (a_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (b_n) là một dãy số tăng. *Hướng dẫn.* Xét hiệu $b_{n+1} - b_n$.

c) Dãy số (c_n) là một dãy số giảm. *Hướng dẫn.* Xét hiệu $c_{n+1} - c_n$.

3.16. a) Dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, ta có

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \times \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vì thế, (u_n) là một dãy số tăng.

b) Dễ thấy $v_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, xét tỉ số $\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ ta có

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \times \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vì thế, (v_n) là một dãy số giảm.

c) Dễ thấy $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ ta có

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3^n}{n^2} \times \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Từ đó, suy ra

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow n \geq 2 \text{ (do } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow n < \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow n = 1 \text{ (do } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

Như vậy, ta có : $a_1 > a_2$ và $a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...$.

Vì thế, (a_n) không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

3.17. a) Viết lại công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) dưới dạng

$$a_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}.$$

Từ đó, ta có với mọi $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - a_n = 3 + 6.\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3.((n+1)(n+2)-2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n(n+3)}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Vì thế, (a_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (b_n) là một dãy số giảm.

Hướng dẫn. Viết lại biểu thức xác định b_n dưới dạng tổng của một hằng số và một phân thức có tử thức là một nhị thức bậc nhất, mẫu thức là một tam thức bậc hai của n. Tiếp theo, xét hiệu $b_{n+1} - b_n$.

3.18. a) Viết lại công thức xác định a_n dưới dạng

$$a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}}.$$

Từ đó, do

$$0 < n + \sqrt{n^2+1} < n + 1 + \sqrt{(n+1)^2+1} \quad (\forall n \geq 1),$$

suy ra $\quad a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} > \dfrac{1}{n+1+\sqrt{(n+1)^2+1}} = a_{n+1} \ (\forall n \geq 1),$

nghĩa là dãy số (a_n) là một dãy số giảm.

b) *Hướng dẫn.* Viết lại công thức xác định b_n dưới dạng

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}.$$

Từ đó, tương tự trên, suy ra (b_n) là một dãy số giảm.

3.19. Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng

$$u_n = \frac{a}{2} + \frac{2-3a}{2.(2n^2+3)}.$$

Từ đó, ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-3a}{2} \times \left(\frac{1}{2.(n+1)^2+3} - \frac{1}{2n^2+3} \right) \ (\forall n \geq 1). \qquad (1)$$

Dễ thấy

$$\left(\frac{1}{2.(n+1)^2+3} - \frac{1}{2n^2+3} \right) < 0 \ (\forall n \geq 1).$$

Vì thế, từ (1) suy ra

a) (u_n) là một dãy số giảm $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{2}{3}$;

b) (u_n) là một dãy số tăng $\Leftrightarrow \dfrac{2-3a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{2}{3}$.

3.20. *Hướng dẫn.* Viết lại công thức xác định v_n dưới dạng

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2.(2n^2-3)}. \qquad (1)$$

Dễ thấy $\forall n \geq 1$, ta có $-1 \leq \dfrac{1}{2n^2-3} \leq \dfrac{1}{5}$. Do đó, từ (1) suy ra $-2 \leq v_n \leq 1$ $(\forall n \geq 1)$. Vì vậy, (v_n) là một dãy số bị chặn.

3.21. Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng

$$u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5.(5n+7)}.$$

Từ đó, suy ra

$$u_{n+1} - u_n = \frac{24}{5} \times \left(\frac{1}{5n+7} - \frac{1}{5(n+1)+7} \right) > 0 \ (\forall n \geq 1),$$

và $$1 \leq u_n < \frac{7}{5} \ (\forall n \geq 1), \text{(do } 0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}\text{)}.$$

Vì thế, (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

3.22. a) Học sinh tự giải.

b) Với n là một số nguyên dương tuỳ ý, ta có

$$u_{n+12} = \sin\frac{(n+12)\pi}{3} + \cos\frac{(n+12)\pi}{6}$$
$$= \sin\left(\frac{n\pi}{3} + 4\pi\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6} + 2\pi\right)$$
$$= \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6} = u_n.$$

3.23. a) Học sinh tự giải.

b) Từ kết quả của phần a), ta có

$$u_1 = u_4 = u_7 = u_{10} = u_{13} = u_{16}$$
$$u_2 = u_5 = u_8 = u_{11} = u_{14} = u_{17}$$
$$u_3 = u_6 = u_9 = u_{12} = u_{15}$$

Từ đó, kí hiệu S_{17} là tổng cần tính, ta có

$$S_{17} = 5.\ (u_1 + u_2 + u_3) + u_1 + u_2. \qquad (1)$$

Bằng cách tính trực tiếp, ta có $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = 0$ và $u_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó, từ (1) ta được

$$S_{17} = 5.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.24. a) Ta có $v_2 = -\frac{3}{2}v_1^2 + \frac{5}{2}v_1 + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2$;

$$v_3 = -\frac{3}{2}v_2^2 + \frac{5}{2}v_2 + 1 = -\frac{3}{2}\times 2^2 + \frac{5}{2}\times 2 + 1 = 0;$$

$$v_4 = -\frac{3}{2}v_3^2 + \frac{5}{2}v_3 + 1 = -\frac{3}{2}\times 0^2 + \frac{5}{2}\times 0 + 1 = 1.$$

b) Ta sẽ chứng minh $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp.

Từ giả thiết của bài ra và kết quả của phần a) ta có $v_1 = v_4$. Như vậy, ta có đẳng thức cần chứng minh khi $n = 1$.

Giả sử đã có đẳng thức nói trên khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh ta cũng có đẳng thức đó khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (v_n) và giả thiết quy nạp ta có

$$v_{k+4} = -\frac{3}{2}v_{k+3}^2 + \frac{5}{2}v_{k+3} + 1 = -\frac{3}{2}v_k^2 + \frac{5}{2}v_k + 1 = v_{k+1}.$$

Từ các chứng minh trên suy ra ta có $v_n = v_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

3.25. a) Học sinh tự giải.

b) Ta sẽ chứng minh

$$u_n = 7n - 6 \qquad (1)$$

với mọi $n \geq 1$,bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 = 7.1 - 6$. Như vậy, (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có

$$u_{k+1} = u_k + 7 = 7.\,k - 6 + 7 = 7.\,(k+1) - 6.$$

Từ các chứng minh trên suy ra ta có (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

3.26. a) Học sinh tự giải.

b) *Hướng dẫn.* Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.27. Học sinh tự giải.

3.28. *Hướng dẫn.* Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.29. *Hướng dẫn.* Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$.

3.30. Học sinh tự giải.

3.31. a) Dãy số (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 3.

b) Dãy số (b_n) không phải là một cấp số cộng.

c) Dãy số (c_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 2.

3.32. *Giải.* Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, vì điểm A_n nằm trên đường thẳng $x = n$ nên hoành độ của nó bằng n. Do A_n nằm trên đồ thị $(\mathscr{C})$ nên tung độ u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = 3n - 2.$$

Như vậy, theo đề bài ta cần chứng minh dãy số (u_n), với $u_n = 3n - 2$, là một cấp số cộng.

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$, ta có với mọi $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = (3.(n+1) - 2) - (3n - 2) = 3.$$

Từ đó suy ra (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3.1 - 2 = 1$ và công sai $d = 3$.

3.33. *Hướng dẫn.* Giả sử (u_n) là một cấp số cộng. Khi đó, tồn tại một hằng số d sao cho

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = d. \quad (1)$$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = 5 - 2u_n. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $u_n = \dfrac{5-d}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (u_n) là một dãy số không đổi. Suy ra, phải có $u_2 = a$ hay $5 - a = a$, dẫn tới $a = \dfrac{5}{2}$.

Ngược lại, với $a = \dfrac{5}{2}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = \dfrac{5}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 0$.

Tóm lại, có duy nhất giá trị a cần tìm là $a = \dfrac{5}{2}$.

3.34. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho. Theo giả thiết ta có $u_2 = 3$, $u_4 = 7$, và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính u_1, u_3, u_5.

Ta có $\quad 2u_3 = u_2 + u_4 = 3 + 7 = 10 \Rightarrow u_3 = 5.$

$$u_1 = 2u_2 - u_3 = 2.3 - 5 = 1$$

$$u_5 = 2u_4 - u_3 = 2.7 - 5 = 9.$$

3.35. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 + u_5 = 28$ và $u_5 + u_7 = 140$. Từ đó

$$\left.\begin{array}{l} 2u_4 = 28 \Rightarrow u_4 = 14 \\ 2u_6 = 140 \Rightarrow u_6 = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow 2u_5 = u_4 + u_6 = 14 + 70 = 84 \Rightarrow u_5 = 42.$$

Suy ra

$$u_7 = 140 - u_5 = 140 - 42 = 98,$$

$$u_3 = 28 - u_5 = 28 - 42 = -14,$$

$$u_2 = 2u_3 - u_4 = 2.(-14) - 14 = -42,$$

$$u_1 = 2u_2 - u_3 = 2.(-42) - (-14) = -70.$$

Vậy, cấp số cộng cần tìm là : $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$.

3.36. Từ giả thiết của bài toán suy ra $u_n = 2 + (n-1).(-3) = -3n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

Vì thế với mỗi $n \geq 1$, điểm $A_n(n, u_n)$ nằm trên đường thẳng $y = -3x + 5$. Nói một cách khác :

Tất cả các điểm A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, cùng nằm trên đường thẳng $y = -3x + 5$.

3.37. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho.

Vì cấp số cộng nói trên có công sai $d > 0$ nên $u_3 < u_5$. Vì thế, từ giả thiết hiệu của u_3 và u_5 bằng 6 ta được $u_5 - u_3 = 6$ hay $(u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6$. Suy ra $d = 3$.

Vì thế, từ giả thiết $u_4 = 11$ ta được $u_1 = u_4 - 3d = 11 - 3.3 = 2$.

Từ đó $u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5$, $u_3 = u_2 + d = 5 + 3 = 8$, $u_5 = u_4 + d = 11 + 3 = 14$,

$$u_6 = u_5 + d = 14 + 3 = 17 \text{ và } u_7 = u_6 + d = 17 + 3 = 20.$$

3.38. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$9 = u_{17} - u_{20} = (u_1 + 16d) - (u_1 + 19d) = -3d \Rightarrow d = -3.$$

$$153 = (u_{17})^2 + (u_{20})^2 = \frac{1}{2}\left[(u_{17} - u_{20})^2 + (u_{17} + u_{20})^2\right] = \frac{1}{2}\left[9^2 + (u_{17} + u_{20})^2\right]$$

$\Rightarrow (u_{17} + u_{20})^2 = 2 \times 153 - 81 = 225 = 15^2$. Xảy ra các trường hợp :

– *Trường hợp 1* : $u_{17} + u_{20} = 15$. Khi đó

$$15 = (u_1 + 16d) + (u_1 + 19d) = 2u_1 + 35d = 2u_1 + 35.(-3) = 2u_1 - 105 \Rightarrow u_1 = 60.$$

– *Trường hợp 2* : $u_{17} + u_{20} = -15$. Khi đó

$$-15 = (u_1 + 16d) + (u_1 + 19d) = 2u_1 + 35d = 2u_1 + 35.(-3) = 2u_1 - 105 \Rightarrow u_1 = 45.$$

Vậy, cấp số cộng đã cho có $u_1 = 60$ và $d = -3$, hoặc $u_1 = 45$ và $d = -3$.

3.39. *Giải.* Ta có

$$101 = (u_{31})^2 + (u_{34})^2 = \frac{1}{2}\left[(u_{31} + u_{34})^2 + (u_{31} - u_{34})^2\right] = \frac{1}{2}\left[11^2 + (u_{31} - u_{34})^2\right]$$

$$\Rightarrow (u_{31} - u_{34})^2 = 2 \times 101 - 121 = 81 = 9^2. \quad (1)$$

Vì $d > 0$ nên $u_{31} < u_{34}$. Do đó, từ (1) ta được $u_{31} - u_{34} = -9$, hay

$$-9 = u_{31} - u_{34} = (u_1 + 30d) - (u_1 + 33d) = -3d \Rightarrow d = 3.$$

Vì thế

$$11 = u_{31} + u_{34} = (u_1 + 30d) + (u_1 + 33d) = 2u_1 + 63d = 2u_1 + 63 \times 3 = 2u_1 + 189$$

$\Rightarrow u_1 = -89.$

Từ đó suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là :

$$u_n = -89 + (n - 1).3 \text{ hay } u_n = 3n - 92.$$

3.40. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có

$$u_{k-m} = u_1 + (k - m - 1)d = u_1 + (k - 1)d - md = u_k - md,$$

$$u_{k+m} = u_1 + (k + m - 1)d = u_1 + (k - 1)d + md = u_k + md.$$

Từ đó suy ra $u_{k-m} + u_{k+m} = 2u_k$ hay $u_k = \dfrac{u_{k-m} + u_{k+m}}{2}$.

Áp dụng. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 = 2$ và $u_1 + u_7 = 10$.

Áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên cho $m = 3$ và $k = 4$, ta được

$$u_4 = \frac{u_1 + u_7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Suy ra $d = u_4 - u_3 = 5 - 2 = 3$. Do đó

$u_1 = u_3 - 2d = 2 - 2.3 = -4$, $u_2 = u_1 + d = -4 + 3 = -1$, $u_5 = u_4 + d = 5 + 3 = 8$,

$u_6 = u_5 + d = 8 + 3 = 11$ và $u_7 = u_6 + d = 11 + 3 = 14$.

3.41. a) Kí hiệu d là công sai và k là số các số hạng của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$d = u_2 - u_1 = 105 - 102 = 3.$$

Suy ra

$$999 = u_k = u_1 + (k-1).d = 102 + (k-1).3 = 99 + 3k \Rightarrow k = 300.$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = \frac{300.(u_1 + u_k)}{2} = \frac{300.(102 + 999)}{2} = 165150.$$

b) *Hướng dẫn.* Kí hiệu k là số các số hạng của cấp số cộng đã cho. Bằng cách tương tự như phần a), ta tìm được $k = 3\,012$. Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = \frac{3\,012.(u_1 + u_k)}{2} = \frac{3\,012.\left(\frac{1}{3} - 2007\right)}{2} = -3\,022\,040.$$

3.42. Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng đã cho, ta có

$$90 = u_5 + u_{19} = (u_1 + 4d) + (u_1 + 18d) = u_1 + (u_1 + 22d) = u_1 + u_{23}.$$

Từ đó, kí hiệu S_{23} là tổng cần tính, ta được

$$S_{23} = \frac{23.(u_1 + u_{23})}{2} = \frac{23 \times 90}{2} = 1035.$$

3.43. Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d = 42 \\ u_1 + 3d + u_1 + 8d = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4. \end{cases}$$

Từ đó, kí hiệu S_{346} là tổng cần tính, ta được

$$S_{346} = \frac{346.(2u_1 + 345d)}{2} = \frac{346.(2 \times 11 + 345 \times 4)}{2} = 242\,546.$$

3.44. *Hướng dẫn.* Kí hiệu d là công sai và S_{15} là tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Vì (u_n) là cấp số cộng tăng nên $d > 0$.

Ta có

$$585 = S_{15} = \frac{15.(u_1 + u_{15})}{2} \Leftrightarrow u_1 + u_{15} = 78 \Leftrightarrow 2u_1 + 14d = 78$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 7d = 39. \qquad (1)$$

$$u_1^3 + u_{15}^3 = 302\,094 \Leftrightarrow (u_1 + u_{15})^3 - 3u_1u_{15}.(u_1 + u_{15}) = 302\,094$$

$$\Leftrightarrow 78^3 - 3u_1.(u_1 + 14d).78 = 302\,094 \Leftrightarrow u_1(u_1 + 14d) = 737. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ

$$\begin{cases} u_1 + 7d = 39 \\ u_1.(u_1 + 14d) = 737. \end{cases}$$

Giải hệ trên, với lưu ý $d > 0$, ta được $u_1 = 11$ và $d = 4$.

3.45. Học sinh tự giải.

3.46. a) Dãy số (a_n) là một cấp số nhân với công bội bằng $\frac{1}{7}$.

b) Dãy số (b_n) không là một cấp số nhân.

c) Dãy số (c_n) không là một cấp số nhân.

d) Dãy số (d_n) là một cấp số nhân với công bội bằng 3.

3.47. Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có

$$u_{n+1} + 3 = 4.(u_n + 3) \quad \forall n \geq 1.$$

Từ đó, theo định nghĩa dãy số (v_n) ta được $v_{n+1} = 4.v_n$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

3.48. *Hướng dẫn.* Từ giả thiết $a \neq 0$ dễ dàng suy ra $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$.

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra tất cả các số hạng của dãy số đó có cùng một loại dấu.

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân. Khi đó, tồn tại một hằng số $q > 0$ sao cho

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \quad \text{với mọi } n \geq 1. \qquad (1)$$

Từ (1) và hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra

$$u_n^2 = \frac{12}{q} \quad \text{với mọi } n \geq 1. \qquad (2)$$

Xét hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $a > 0$. Khi đó, ta có $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, từ (2) ta được

$$u_n = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{q}} \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

hay (u_n) là một dãy số không đổi. Do vậy, phải có $u_2 = a$ hay $\frac{12}{a} = a$. Dẫn tới $a = 2\sqrt{3}$.

– *Trường hợp 2* : $a < 0$. Khi đó, ta có $u_n < 0$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, từ (2) ta được

$$u_n = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{q}} \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

hay (u_n) là một dãy số không đổi. Do vậy, phải có $u_2 = a$ hay $\frac{12}{a} = a$. Dẫn tới $a = -2\sqrt{3}$.

Ngược lại :

– Với $a = 2\sqrt{3}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = 2\sqrt{3}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

– Với $a = -2\sqrt{3}$ dễ dàng chứng minh được $u_n = -2\sqrt{3}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Tóm lại, tất cả các giá trị a cần tìm là $a = 2\sqrt{3}$ và $a = -2\sqrt{3}$.

3.49. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Theo giả thiết ta có $u_2 = 3$, $u_4 = 6$ và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính u_1, u_3, u_5.

Ta có $u_3^2 = u_2.u_4 = 3.6 = 18$, $u_1 = \frac{u_2^2}{u_3} = \frac{9}{u_3}$, $u_5 = \frac{u_4^2}{u_3} = \frac{36}{u_3}$. (1)

Vì cấp số nhân đã cho có công bội dương và $u_2 > 0$ nên $u_3 > 0$. Do đó, từ (1) ta được

$$u_3 = 3\sqrt{2}, u_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, u_5 = 6\sqrt{2}.$$

3.50. *Giải.* Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có

$$u_3.u_5 = 5\,184 \text{ và } u_5.u_7 = 746\,496.$$

Vì cấp số nhân đã cho có số hạng đầu và công bội là các số âm nên

$$u_1 < 0, u_2 > 0, u_3 < 0, u_4 > 0, u_5 < 0, u_6 > 0, u_7 < 0.$$

Từ đó

$$\left.\begin{array}{l} u_4^2 = 5\,184 \Rightarrow u_4 = 72 \\ u_6^2 = 746\,496 \Rightarrow u_6 = 864 \end{array}\right\} \Rightarrow u_5^2 = u_4.u_6 = 72 \times 864 = 62\,208 \Rightarrow u_5 = -144\sqrt{3}.$$

Suy ra

$$u_7 = \frac{746\,496}{-144\sqrt{3}} = -1\,728\sqrt{3},$$

$$u_3 = \frac{5184}{-144\sqrt{3}} = -12\sqrt{3},$$

$$u_2 = \frac{u_3^2}{u_4} = \frac{432}{72} = 6,$$

$$u_1 = \frac{u_2^2}{u_3} = \frac{36}{-12\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

Vậy, cấp số nhân cần tìm là : $-\sqrt{3}, 6, -12\sqrt{3}, 72, -144\sqrt{3}, 864, -1728\sqrt{3}$.

3.51. Từ định nghĩa tam giác trung bình suy ra mỗi cạnh của tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ là một đường trung bình của tam giác $A_nB_nC_n$. Vì thế, từ giả thiết tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều suy ra $A_nB_nC_n$ là tam giác đều với mọi $n \geq 1$. Từ đó, kí hiệu a_n là độ dài cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ta có

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{3}} = \frac{a_n}{2.\sqrt{3}} = \frac{r_n}{2} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (r_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$ và số hạng đầu

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Theo định lí về số hạng tổng quát của một cấp số nhân, ta có số hạng tổng quát của cấp số nhân nói trên là :

$$r_n = r_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}.2^{n-1}}.$$

3.52. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đó.

Theo giả thiết ta có $u_4 = 6$, $u_7 = 243u_2$ và theo yêu cầu của bài ra ta cần tính $u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7$.

Hiển nhiên có $u_2 \neq 0$; vì nếu ngược lại thì phải có $u_4 = 0$, trái với giả thiết của bài ra. Vì thế, từ giả thiết $u_7 = 243u_2$, theo công thức xác định số hạng tổng quát của một cấp số nhân, ta được

$$243 = \frac{u_7}{u_2} = \frac{u_1.q^6}{u_1.q} = q^5.$$

Suy ra $q = 3$. Vì thế, từ giả thiết $u_4 = 6$ ta được $u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$.

Từ đó : $u_2 = u_1.\, q = \frac{2}{3}$, $u_3 = u_2.\, q = 2$, $u_5 = u_4.\, q = 18$, $u_6 = u_5.\, q = 54$,

$u_7 = u_6.\, q = 162$.

3.53. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^{19} = 8.u_1.q^{16} \\ u_1.(q^2 + q^4) = 272 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^{16}.(q^3 - 8) = 0 \\ u_1.q^2.(1 + q^2) = 272. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Dễ thấy, $u_1 . q \neq 0$; vì nếu ngược lại thì phải có $u_3 = u_5 = 0$, trái với giả thiết của bài ra. Do đó, ta có

(I) $\Leftrightarrow$ $u_1 = 13{,}6$ và $q = 2$.

3.54. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có

$$\begin{cases} 6u_2 + u_5 = 1 \\ 3u_3 + 2u_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(6q + q^4) = 1 & (1) \\ u_1.(3q^2 + 2q^3) = -1. & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy, $u_1 . q \neq 0$. Do đó cộng theo vế (1) và (2) ta được

$$q^3 + 2q^2 + 3q + 6 = 0 \Leftrightarrow (q+2)(q^2+3) = 0 \Leftrightarrow q = -2.$$

Từ đó suy ra

$$u_1 = \frac{1}{4} \text{ và } q = -2.$$

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là :

$$u_n = \frac{1}{4} \times (-2)^{n-1}.$$

3.55. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân (u_n). Xét hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $q = 0$. Khi đó $u_n = 0$ với mọi $n \geq 2$. Vì thế, hiển nhiên ta có điều cần chứng minh.

– *Trường hợp 2* : $q \neq 0$. Khi đó

$$u_{k-m} = u_1 . q^{k-m-1} = \frac{u_1 . q^{k-1}}{q^m} = \frac{u_k}{q^m},$$

$$u_{k+m} = u_1 . q^{k+m-1} = u_1 . q^{k-1} . q^m = u_k . q^m.$$

Từ đó suy ra $u_{k-m} . u_{k-m} = u_k^2$ hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-m}.u_{k+m}}$.

Áp dụng. Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân cần tìm. Theo giả thiết của bài ra, ta có $u_3 = 2$ và $u_1 . u_7 = 18$.

Vì cấp số nhân cần tìm có công bội âm và $u_3 > 0$ nên $u_4 < 0$. Do đó, áp dụng kết quả đã chứng minh ở trên cho $m = 3$ và $k = 4$, ta được

$$u_4 = -\sqrt{u_1 . u_7} = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}.$$

Suy ra $\quad q = \dfrac{u_4}{u_3} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Do đó

$u_2 = \dfrac{u_3}{q} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $u_1 = \dfrac{u_2}{q} = \dfrac{4}{9}$, $u_5 = u_4 . q = 9$, $u_6 = u_5 . q = -\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$,

$u_7 = u_6 . q = \dfrac{81}{2}$

Vậy, cấp số nhân cần tìm là : $\dfrac{4}{9}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, 2, -3\sqrt{2}, 9, -\dfrac{27\sqrt{2}}{2}, \dfrac{81}{2}$.

3.56. a) Kí hiệu q là công bội và k là số số hạng của cấp số nhân đã cho. Ta có

$$q = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Suy ra

$$64\sqrt{2} = u_k = u_1 . q^{k-1} = \sqrt{2}.(-\sqrt{2})^{k-1} \Rightarrow k = 13.$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = u_1 \times \frac{1-q^{13}}{1-q} = \sqrt{2} \times \frac{1-(-\sqrt{2})^{13}}{1-(-\sqrt{2})} = -126 + 127\sqrt{2}.$$

b) Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Ta có

$$\frac{81}{256} = u_{11} = u_1 . q^{10} = \frac{4}{3} \times q^{10} \Rightarrow q^{10} = \frac{243}{1024} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Từ đó, kí hiệu tổng cần tính là S, ta được

$$S = u_1 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{4}{3} \times \frac{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{11}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3367 + 1562.\sqrt{3}}{768}$$

3.57. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy, $u_1 . q \neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} 8.u_2 - 5\sqrt{5}.u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q.(8 - 5\sqrt{5}.q^3) = 0 \\ u_1^3.(1+q^6) = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1 = 5 \end{cases}.$$

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tính, ta được

$$S = 5\times\frac{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{12}}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{57645 + 23058.\sqrt{5}}{3125}.$$

3.58. Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(1+q^2) = 3 \quad (1) \\ u_1^2.(1+q^4) = 5 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Từ (1) suy ra $u_1 > 0$. Do đó

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(1+q^2) = 3 \\ 2q^4 - 5q^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(1+q^2) = 3 \\ q = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (\text{do } q \in (0\,;\,1)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Từ đó, kí hiệu S là tổng cần tính, ta được

$$S = 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{25}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8191 + 4095.\sqrt{2}}{2048}.$$

3.59. Kí hiệu q là công bội của cấp số nhân đã cho. Dễ thấy, $u_1.\, q \neq 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}.u_2 + u_5 = 0 \\ u_3^2 + u_6^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q.(3\sqrt{3} + q^3) = 0 \\ u_1^2.q^4.(1+q^6) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\sqrt{3} \\ |u_1| = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{I})$$

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội q nên dãy số $(|u_n|)$ là một cấp số nhân với công bội $|q|$. Vì thế, kí hiệu S là tổng cần tính, từ (I) ta được

$$S = \frac{1}{2}\times\frac{1-(\sqrt{3})^{15}}{1-\sqrt{3}}.$$

3.60. *Hướng dẫn.* Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$.

3.61. Nhận thấy $x \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $y = z = 0$ và do đó cấp số cộng x, $2y$, $3z$ có công sai bằng 0, trái với giả thiết của đề bài.

Vì x, y, z là cấp số nhân với công bội q nên

$$y = xq \text{ và } z = xq^2. \quad (1)$$

Vì x, $2y$, $3z$ là một cấp số cộng nên

$$4y = x + 3z. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$4xq = x.(1 + 3q^2)$$
$$\Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \text{ (vì } x \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \text{ (vì } q \neq 1 \text{ theo giả thiết).}$$

3.62. Vì dãy số x, y, z là một cấp số nhân nên $y^2 = x.z$.

Kí hiệu d là công sai của cấp số cộng nhận các số x, y, z lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ ba và số hạng thứ chín, ta có $y - x = 2d$ và $z - y = (z - x) - (y - x) = 8d - 2d = 6d$. Từ đó, suy ra $z - y = 3.(y - x)$, hay $z + 3x = 4y$.

Như vậy, từ các giả thiết của bài ra ta được

$$\begin{cases} y^2 = x.z & (1) \\ z + 3x = 4y & (2) \\ x + y + z = 13 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) và (3), ta có $x = \frac{5y - 13}{2}$ và $z = \frac{39 - 7y}{2}$. Thế x và z vào (1), ta được

$$4y^2 = (5y - 13)(39 - 7y), \text{ hay } 3y^2 - 22y + 39 = 0.$$

Từ đó $y = 3$ hoặc $y = \frac{13}{3}$.

– Với $y = 3$ ta có $x = \frac{5.3 - 13}{2} = 1$ và $z = \frac{39 - 7.3}{2} = 9$.

– Với $y = \frac{13}{3}$ ta có $x = \frac{5 \times \frac{13}{3} - 13}{2} = \frac{13}{3}$ và $z = \frac{39 - 7 \times \frac{13}{3}}{2} = \frac{13}{3}$.

Ngược lại, dễ thấy các số $x = 1$, $y = 3$, $z = 9$, cũng như các số $x = \frac{13}{3}$, $y = \frac{13}{3}$, $z = \frac{13}{3}$, đều thoả mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy, các số x, y, z vừa nêu trên là tất cả các số cần tìm.

3.63. *Hướng dẫn.* Từ các giả thiết của bài ra, ta có

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ (y - 4)^2 = xz \\ 2(y - 4) = x + z - 9. \end{cases}$$

Giải hệ trên rồi kiểm tra các nghiệm tìm được, ta được tất cả các số x, y, z cần tìm là :

$$x = 1, y = 2, z = 4 \text{ và } x = 4, y = 2, z = 1.$$

3.64. (A).

3.65. (A).

3.66. (C).

3.67. (C).

3.68. a) Học sinh tự giải.

b) *Hướng dẫn.* Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

3.69. a) Ta có

$$u_{n+4} = \cos(3(n+4)+1)\frac{\pi}{6} = \cos((3n+1)\frac{\pi}{6} + 2\pi) = \cos(3n+1)\frac{\pi}{6} = u_n$$

$\forall n \geq 1$.

b) *Hướng dẫn.* Kí hiệu S là tổng 27 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Từ kết quả phần a), ta được

$$S = 6(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_1 + u_2 + u_3. \qquad (1)$$

Bằng cách tính trực tiếp, ta có : $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được : $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.70. a) (u_n) là một dãy số tăng.

Hướng dẫn. Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$.

b) (v_n) là một dãy số giảm.

Hướng dẫn. Xét tỉ số $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

3.71. a) Ta có $u_1 = S_1 = 2, u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1 = 1 - 2 = -1$,

$$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) - (u_1 + u_2) = S_3 - S_2 = -4.$$

b) Đặt $S_0 = 0$, ta có số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(7-3n)}{2} - \frac{(n-1)[7-3(n-1)]}{2} = 5 - 3n.$$

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = 5 - 3(n+1) - 5 + 3n = -3$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (u_n) là một cấp số cộng với công sai bằng -3.

3.72. *Hướng dẫn.* Với mỗi $n \geq 1$, do A_n và B_n nằm trên parabol $y = x^2$ nên $A_n = (a_n ; a_n^2)$ và $B_n = (b_n ; b_n^2)$. Từ đó :

– Do đường thẳng A_nB_n có hệ số góc bằng $-\frac{1}{5}$ nên $a_n + b_n = -\frac{1}{5}$ với mọi $n \geq 1$;

– Do đường thẳng B_nA_{n+1} có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$ nên $a_{n+1} + b_n = \frac{1}{4}$ với mọi $n \geq 1$.

Suy ra với mọi $n \geq 1$, ta có

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9}{20} \text{ và } b_{n+1} - b_n = -\frac{9}{20}.$$

Vì thế :

– Dãy số (a_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu a_1 và công sai $d = \frac{9}{20}$;

– Dãy số (b_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $b_1 = -\frac{1}{5} - a_1$ và công sai $d = -\frac{9}{20}$.

Số hạng tổng quát : $a_n = a_1 + (n-1) \times \frac{9}{20}$ và $b_n = -\frac{1}{5} - a_1 - (n-1) \times \frac{9}{20}$.

3.73. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $n \geq 1$

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2, \text{ hay } v_{n+1} = v_n + 2.$$

Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = u_1^2 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Từ định nghĩa dãy số (u_n) và dãy số (v_n) dễ dàng suy ra $u_n > 0$ và $v_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó, ta có $u_n = \sqrt{v_n}$ với mọi $n \geq 1$.

Từ kết quả phần a) suy ra : $v_n = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$ $(\forall n \geq 1)$. Vì thế

$$u_n = \sqrt{2n-1} \quad (\forall n \geq 1).$$

c) $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{1001}^2$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{1001} = \frac{1001.(2.1 + (1001-1).2)}{2} = 1\,002\,001.$$

3.74. a) Kí hiệu S_N là tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n). Ta sẽ chứng minh

$$S_N = u_{N+1} - u_1 \qquad (1)$$

với mọi $N \geq 1$, bằng phương pháp quy nạp.

Với $N = 1$, ta có $S_1 = v_1 = u_2 - u_1$. Như vậy, (1) đúng khi $N = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $N = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $N = k + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp và định nghĩa dãy số (v_n) ta có

$$S_{k+1} = S_k + v_{k+1} = (u_{k+1} - u_1) + (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{k+2} - u_1.$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $N \geq 1$.

b) Từ định nghĩa dãy số (v_n) và hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $v_n = n$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $v_{n+1} - v_n = (n+1) - n = 1$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai bằng 1.

3.75. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$ với mọi $n \geq 1$. Do đó

$$v_n = 2n - 1 \ (\forall n \geq 1).$$

Suy ra $v_{n+1} - v_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = 2$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, (v_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 1$ và công sai bằng 2.

b) *Hướng dẫn*. Kí hiệu S_N là tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (v_n). Từ kết quả phần a), ta có

$$S_N = \frac{N.(2.1 + (N-1).2)}{2} = N^2. \quad (1)$$

Mặt khác, bằng cách tương tự như lời giải phần a) Bài tập 3.76, ta chứng minh được

$$S_N = u_{N+1} - u_1 \ (\forall N \geq 1). \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được : $u_{N+1} - u_1 = N^2$, hay $u_{N+1} = N^2 + u_1 = N^2 + 1$ $(\forall N \geq 1)$. Từ đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là : $u_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

3.76. a) Ta có $u_1 = S_1 = 2$, $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = S_2 - u_1 = S_2 - S_1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$,

$$u_3 = (u_1 + u_2 + u_3) - (u_1 + u_2) = S_3 - S_2 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} = \frac{2}{9}.$$

b) Đặt $S_0 = 0$, ta có $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}} - \frac{3^{n-1} - 1}{3^{n-2}} = \frac{2}{3^{n-1}}$ $(\forall n \geq 1)$.

c) Ta có $u_{n+1} = \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} u_n$ với mọi $n \geq 1$. Vì thế, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội bằng $\frac{1}{3}$.

3.77. a) Với mỗi $n \geq 1$, kí hiệu a_n và b_n tương ứng là tung độ của điểm A_n và điểm B_n. Khi đó :

– Do A_n nằm trên (d_1) nên $a_n = 2u_n - 1$.

– Do B_n là giao điểm của (d_2) và đường thẳng đi qua A_n, song song với trục tung nên $b_n = u_n$. Suy ra với mọi $n \geq 1$:

$$h_n = a_n - b_n = (2u_n - 1) - u_n = u_n - 1. \qquad (1)$$

Hơn nữa, với mỗi $n \geq 1$, do B_{n+1} nằm trên đường thẳng đi qua A_n và song song với trục hoành nên $b_{n+1} = a_n = 2u_n - 1$. Suy ra

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó ta được $u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1)$ với mọi $n \geq 1$, hay $h_{n+1} = 2h_n$ với mọi $n \geq 1$ (theo (1)). Vì thế, (h_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu

$h_1 = u_1 - 1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội $q = 2$.

b) Ta có $h_n = h_1 . q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra

$$u_n = h_n + 1 = 2^{n-2} + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

3.78. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) suy ra với mọi $\forall n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n}, \text{ hay } v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n.$$

Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{3}$ và công bội bằng $\dfrac{1}{3}$.

b) Ta có $v_n = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{1}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ với mọi $n \geq 1$.

c) Ta có $S = u_1 + \dfrac{u_2}{2} + \dfrac{u_3}{3} + \ldots + \dfrac{u_{11}}{11}$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{11}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^{11}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^{11} - 1}{2.3^{11}} = \frac{88573}{177147}.$$

3.79. a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có $u_{n+1} - \dfrac{1}{5} = 6\left(u_n - \dfrac{1}{5}\right)$ với mọi $n \geq 1$, hay

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} = 6v_n.$$

Vì thế, dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

và công bội $q = 6$.

b) Từ kết quả phần a) suy ra với mọi $n \geq 1$

$$v_n = v_1 . q^{n-1} = \frac{4.6^{n-1}}{5};$$

$$u_n = v_n + \frac{1}{5} = \frac{4.6^{n-1}+1}{5}.$$

c) Kí hiệu T_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và S_{10} là tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n). Ta có

$$T_{10} = S_{10} + 10 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{1-6^{10}}{1-6} + 2 = 9\ 674\ 590.$$

3.80. *Hướng dẫn*

– Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có $q \neq 0$. Vì thế, $(\frac{1}{u_n})$ là một cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

– Bằng phương pháp phản chứng, dễ dàng chứng minh được $q \neq 1$. Do đó

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49.\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \times \frac{1-q^5}{1-q} = \frac{49}{u_1} \times \frac{1-\frac{1}{q^5}}{1-\frac{1}{q}} \\ u_1.(1+q^2) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 = \frac{49}{q^4} \\ u_1.(1+q^2) = 35. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Từ hệ (I) ta được $u_1 = 28$.

3.81. Vì các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên

$2(5x + 2y) = (x + 6y) + (8x + y)$ hay $x = 3y$. (1)

Vì các số $x + \frac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên

$(y-1)^2 = \left(x + \frac{5}{3}\right)(2x - 3y)$ hay $2x^2 - y^2 - 3xy + \frac{10}{3}x - 3y - 1 = 0.$ (2)

Thế (1) vào (2), ta được

$$8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hoặc } y = \frac{1}{8}.$$

– Với $y = -1$ ta có $x = -3$.

– Với $y = \frac{1}{8}$ ta có $x = \frac{3}{8}$.

3.82. Vì các số $x + 5y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng nên

$2(5x + 2y) = (x + 5y) + (8x + y)$ hay $x = 2y$. (1)

Vì các số $(y - 1)^2$, $xy - 1$, $(x + 2)^2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên

$(xy - 1)^2 = (y - 1)^2.(x + 2)^2$ hay $(x - 2y + 1)(2xy - x + 2y - 3) = 0$. (2)

Thế (1) vào (2), ta được

$$4y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

– Với $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x = -\sqrt{3}$.

– Với $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x = \sqrt{3}$.

3.83. Với mỗi $n \geq 1$, ta có

$$\frac{1}{u_n - 1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2^n}{5^n} + 1\right).$$

Do đó : $S_N = -\frac{1}{2}(T_N + N)$, trong đó $T_N = \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + ... + \frac{2^N}{5^N}$.

Dễ thấy, T_N là tổng N số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu bằng $\frac{2}{5}$ và công bội bằng $\frac{2}{5}$. Vì thế

$$T_N = \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^N}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5^N - 2^N}{5^N}.$$

Suy ra : $$S_N = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times \frac{5^N - 2^N}{5^N} + N\right) = \frac{-(2+3N).5^N + 2^{N+1}}{6.5^N}.$$

CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

1. Dãy số

• $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow$ Mọi $|u_n|$ đều nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

• $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0.$

• $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow$ Mọi u_n đều lớn hơn một số dương tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

• $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow$ Mọi u_n đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

2. Hàm số

• Giả sử $x_0 \in (a\,;b)$ và f là một hàm số xác định trên $(a\,;b)$ có thể trừ điểm x_0.

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong $(a\,;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong $(a\,;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

• Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0\,;b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Với mọi dãy số (x_n) trong $(x_0\,;b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$,

  $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  được định nghĩa tương tự.

II – CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ VÀ HÀM SỐ

1. Dãy số

- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ thì

  $\lim |u_n| = |L|$; $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$; $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$ (nếu $u_n \geq 0$ với mọi n).

- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$, $\lim u_n = M \in \mathbb{R}$ thì

  $\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$; $\lim(u_n v_n) = L.M$;

  $\lim(cu_n) = cL$ (c là hằng số) ; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

2. Hàm số

- Nếu $\lim f(x) = L$ ($x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) thì

  $\lim |f(x)| = |L|$; $\lim \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$; $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (nếu $f(x) \geq 0$).

- Nếu $\lim f(x) = L$ và $\lim g(x) = M$ ($x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) thì

  $\lim[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$; $\lim[f(x)g(x)] = L.M$; $\lim cf(x) = cL$ (c là hằng số) ; $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

III - MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Dãy số. Xem Quy tắc 1, Quy tắc 2, Quy tắc 3 trong §3 chương IV Đại số và Giải tích 11 nâng cao.

2. **Hàm số.** Xem Quy tắc 1, Quy tắc 2 trong §6 chương IV Đại số và Giải tích 11 nâng cao.

IV – HÀM SỐ LIÊN TỤC

- **Định nghĩa**

– Hàm số f xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm số f xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

– Hàm số f xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

- **Định lí** (về giá trị trung gian của hàm số liên tục).

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ và M là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho $f(c) = M$.

V – MỘT VÀI GIỚI HẠN CẦN NHỚ

- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.
- Nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.
- Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu u_1 và công bội q ($|q| < 1$) là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

B - ĐỀ BÀI

§1. DÃY CÓ GIỚI HẠN 0

4.1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+\dfrac{1}{2}}$; b) $\dfrac{1}{n!}$; c) $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}$.

4.2. Chứng minh rằng hai dãy số (u_n), (v_n) với

$$u_n = \frac{1+\cos n^2}{2n+1}\ ;\ v_n = \frac{n+\sin 2n}{n^2+n}$$

có giới hạn 0.

4.3. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n^2 + \cos n}{2\sqrt[3]{n}+1}$;

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}}$; d) $u_n = \dfrac{n+\cos\dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.

4.4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{u_n}{2} \text{ với mọi } n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) $0 < u_n \leq \dfrac{1}{4}$ với mọi n ; b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{3}{4}$ với mọi n.

Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

4.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ và

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi } n.$$

b) Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

4.6. Chứng minh rằng

a) $\lim 2(\sqrt{n^2+1} - n) = 0$,

b) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

§2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

4.7. Áp dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(3 + \dfrac{n^2 \sin 3n}{n^3 + 1}\right)$;

b) $\lim\left(\dfrac{n}{n^2+1} - 1\right)$;

c) $\lim \dfrac{2n}{2n+1}$;

d) $\lim \dfrac{n+1}{2n+1}$;

e) $\lim \dfrac{5.2^n - \cos 5n}{2^n}$;

f) $\lim \dfrac{n^2 + 2n + 3}{2(n+1)^2}$.

4.8. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \dfrac{2n^5 - 7n^2 - 3}{n - 3n^5}$;

b) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 4}{\sqrt{2n^4 - n^2 + 1}}$;

c) $u_n = \dfrac{n^3 - n^2 \sin 3n - 1}{2n^4 - n^2 + 7}$;

d) $u_n = \dfrac{7.2^n + 4^n}{2.3^n + 4^n}$;

e) $u_n = \dfrac{5.2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$;

f) $u_n = \sqrt{\dfrac{n^6 + 3n^3 - 3}{2n^6 + n^5 + 2}}$.

4.9. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Chứng minh rằng nếu $\lim u_n = 0$ và tồn tại một số dương c sao cho $|v_n| \leq c$ với mọi n thì $\lim(u_n v_n) = 0$.

4.10. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}.$$

4.11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 10, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a) $u_n > 1$ với mọi n.

b) $u_{n+1} - 1 < \dfrac{u_n - 1}{2}$ với mọi n.

c) Tìm $\lim u_n$.

4.12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

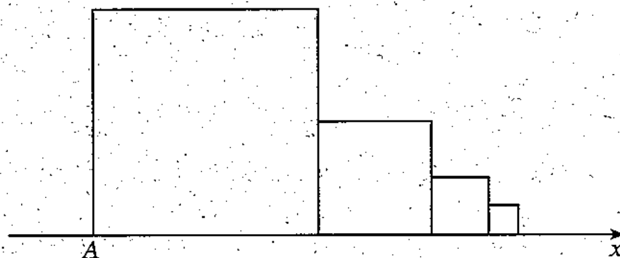
$$\begin{cases} u_1 = -5, \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 6. \end{cases}$$

Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = u_n + 18$.

a) Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn ;

b) Tính tổng của cấp số nhân (v_n) và tìm $\lim u_n$.

4.13. Người ta xếp các hình vuông kề với nhau như trong hình 4.1 dưới đây, mỗi hình vuông có độ dài cạnh bằng nửa độ dài cạnh của hình vuông trước nó. Nếu hình vuông đầu tiên có cạnh dài 10cm thì trên tia Ax cần có một đoạn thẳng dài bao nhiêu xentimét để có thể xếp được tất cả các hình vuông đó ?



Hình 4.1

4.14. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 81m. Mỗi lần chạm đất, quả bóng lại nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

4.15. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số :

a) 0,222... ; b) 0,393939... ; c) 0,27323232...

4.16. Cho hai số dương a, b và dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

Tìm $\lim u_n$ trong các trường hợp sau :

$$a = b \ ; \ a < b \ ; \ a > b.$$

4.17. Chứng minh rằng nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

H.D. Xét trường hợp $0 < q < 1$. Khi đó $p = \frac{1}{q} > 1$. Do đó

$p = 1 + h$ với $h = p - 1 > 0$ và $\frac{1}{q^n} = p^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$ với mọi n.

4.18. Các dãy số (u_n) và (v_n) với

$$u_n = \cos n\pi, \ v_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

có giới hạn hay không ?

4.19. a) Chứng minh rằng nếu dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và dãy (v_n) không có giới hạn hữu hạn thì dãy số $(u_n + v_n)$ không có giới hạn hữu hạn.

b) Dãy số $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn hay không ?

4.20. a) Chứng minh rằng nếu dãy số (u_n) không có giới hạn hữu hạn thì với mọi số $c \neq 0$, dãy (cu_n) cũng không có giới hạn hữu hạn.

b) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) không có giới hạn hữu hạn. Có thể kết luận rằng dãy số $(u_n + v_n)$ có giới hạn hữu hạn được không?

§3. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

4.21. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = -n^4 - 50n + 11$; b) $\sqrt[3]{7n^2 - n^3}$;

c) $u_n = \sqrt{5n^2 - 3n + 7}$; d) $\sqrt{2n^3 + n^2 - 2}$.

4.22. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \dfrac{3n - n^3}{2n + 15}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^4 - n^2 + 7}}{3n + 5}$;

c) $u_n = \dfrac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$; d) $u_n = \dfrac{(2n + 1)(1 - 3n)}{\sqrt[3]{n^3 + 7n^2 - 5}}$.

4.23. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1})$; b) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}$.

4.24. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(1{,}001)^n$; b) $\lim(3.2^n - 5^{n+1} + 10)$;

c) $\lim \dfrac{3^n - 11}{1 + 7.2^n}$; d) $\lim \dfrac{2^{n+1} - 3.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}$.

4.25. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2 - n + 2}$; b) $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n^4 - n^2 + n}}$;

c) $u_n = \dfrac{10}{2.4^n - 3}$; d) $u_n = \dfrac{101}{7.2^n - 5^n}$.

4.26. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

4.27. a) Cho một số $h > 0$. Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

b) Chứng minh rằng nếu $q > 1$ thì

$$\lim \frac{q^n}{n} = +\infty.$$

c) Cho $q > 1$. Tìm $\lim \frac{n}{q^n}$.

Hướng dẫn. b) Đặt $q = 1 + h$ và áp dụng a).

4.28. Chứng minh rằng nếu $q > 1$ thì $\lim \frac{n^2}{q^n} = 0$.

Hướng dẫn. Áp dụng bài tập 4.27c).

4.29. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \frac{2n - 3^n}{n + 2^n}$; b) $\lim (100n - 7 - 2^n)$.

4.30. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Chứng minh rằng

a) Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$,

b) Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ và $\lim |v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim v_n = L \in \mathbb{R}$ thì $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

4.31. Áp dụng định nghĩa giới hạn của dãy số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \left(10 - \frac{2\sin n^2}{\sqrt{n}}\right)$; b) $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n (\sqrt{3})^n}{3.2^{n+1}}\right)$;

c) $\lim \frac{n \sin n^2 - 3n^2}{n^2}$; d) $\lim \frac{n - 2\sqrt{n}}{2n}$.

4.32. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \dfrac{n^4 - n^2\cos 3n - 1}{2n^4 + n^2 - 1}$;

b) $\lim \dfrac{2n - 11}{n^4 + 3n^3 - n + 2}$;

c) $\lim \dfrac{n^4 - 2n^2 + n - 20}{2n^2 + n + 7}$;

d) $\lim \dfrac{\sqrt{2n^2 + n - 2}}{3 - 2n}$;

4.33. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

a) $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4}$;

b) $u_n = \dfrac{13.3^n - 5n}{3.2^n + 5.4^n}$.

4.34. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(n\cos\dfrac{n\pi}{5} - 2n^2\right)$;

b) $\lim\sqrt{2n^4 - n + 3}$;

c) $\lim\sqrt[3]{100 - 2n^2 - 3n^3}$;

d) $\lim\sqrt{3.4^n - n + 2}$.

4.35. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$;

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}}$;

c) $\lim(2n - 1)\sqrt{\dfrac{2n + 3}{n^4 - n^2 + 2}}$;

d) $\lim\sqrt{\dfrac{3^n + 2^{n+1}}{5n + 3^{n+1}}}$.

4.36. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\dfrac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

4.37. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ 2u_{n+1} = u_n + 1. \end{cases}$$

Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi

$$v_n = u_n - 1 \text{ với mọi } n.$$

a) Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn ;

b) Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

§4. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

4.38. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{2x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+x-1)$.

4.39. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin 2x$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos 3x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{2}{x}$.

Hướng dẫn. a) Lấy hai dãy số (x_n) và (x'_n) với $x_n = n\pi$, $x'_n = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$

Tìm $\lim x_n$, $\lim x'_n$, $\lim f(x_n)$, $\lim f(x'_n)$.

c) Chọn dãy (x_n) sao cho $\dfrac{1}{2x_n} = n\pi$ hay $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. Tìm $\lim x_n$ và $\lim f(x_n)$.

4.40. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

4.41. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng $(a\,;\,b)$ có thể trừ điểm $x_0 \in (a\,;\,b)$. Chứng minh rằng nếu

$$|f(x)| \le |g(x)| \text{ với mọi } x \in (a\,;\,b)\setminus\{x_0\}, \text{ và } \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

thì

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

4.42. Giả sử hàm số f xác định trên một khoảng chứa điểm $x = 0$. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ biết rằng

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le M \text{ với mọi } x \ne 0 \text{ (} M \text{ là một hằng số).}$$

4.43. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ nếu

$$1 \le f(x) \le x^2 - 4x + 5 \text{ với } 0 < |x - 2| < 1.$$

4.44. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3}(3 - 4x)^2$;

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 + x + 1}{2x^5 + 3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(2x - 1)}{x^4 + x + 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x}\right|$;

h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2 - x - 6)^2}{x^3 + 2x^2}$.

4.45. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x - 3}{1 - 3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\dfrac{2x + 1}{3x^3 + x^2 + 2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x + 3}{\sqrt{2x^2 - 3}}$.

§5. GIỚI HẠN MỘT BÊN

4.46. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{|3x + 6|}{x + 2}$;

d) $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{|3x + 6|}{x + 2}$.

4.47. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2 - x}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3\sqrt{x} - x}{\sqrt{2x} + x}$.

4.48. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{với } -3 \le x < 3, \\ 1 & \text{với } x = 3, \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{với } x > 3. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (nếu có).

4.49. Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$.

Chẳng hạn $[5] = 5$; $[3,12] = 3$; $[-2,725] = -3$. Vẽ đồ thị của hàm số $y = [x]$ và tìm

$$\lim_{x \to 3^+} [x] \text{ ; } \lim_{x \to 3^-} [x] \text{ và } \lim_{x \to 3} [x] \text{ (nếu có).}$$

4.50. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$; d) $\lim\limits_{x \to -3} \left| \dfrac{9 - x^2}{2x^2 + 7x + 3} \right|$.

4.51. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x - 5)(1 - x)^2}{3x^3 - x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x - 1)\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^4 + x^2 + 2}{(x^3 + 1)(3x - 1)}}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$.

4.52. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^2+1)(2-x)}}$;

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$;

c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

§6. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

4.53. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3-5x^2+7)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1000x-x^3}$;

4.54. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3}{x^3+x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2-x|}{(x-2)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-2x^2}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$.

4.55. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$.

4.56. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{(x-3)^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{4x^4-3}{2x^2+3x-2}$.

§7. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

4.57. Tìm các giới hạn sau (nếu có) :

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+3)^3-27}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

4.58. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$.

4.59. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+1}-x\sqrt{3}\right)$.

§8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

4.60. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm cho trước :

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & \text{với } x<2 \\ 2x+1 & \text{với } x\geq 2 \end{cases}$ tại điểm $x=2$;

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{với } x\neq -2 \\ -4 & \text{với } x=-2 \end{cases}$ tại điểm $x=-2$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{với } x<0, \\ 1-\sqrt{x} & \text{với } x\geq 0 \end{cases}$ tại điểm $x=0$;

d) $f(x)=\begin{cases} 4-3x^2 & \text{với } x\leq -2 \\ x^3 & \text{với } x>-2 \end{cases}$ tại điểm $x=-2$.

4.61. Tìm các khoảng và nửa khoảng trên đó mỗi hàm số sau đây liên tục :

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+7x+10}$;

b) $f(x)=\sqrt{3x-2}$;

c) $f(x)=x^2+2\sqrt{x}-3$;

d) $f(x)=(x+1)\sin x$.

4.62. Tìm số thực a sao cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{với } x<1, \\ 2ax-3 & \text{với } x\geq 1 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

4.63. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

4.64. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x^2+11x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+1}{(x+3)(x^3+27)}$; d) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2-2x}}$.

4.65. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x+2}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}-\sqrt{3x^2+4x+1}}{x^2+5x-14}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}+x\sqrt{3}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-1}{x^3+1}}$.

4.66. Tìm số thực a sao cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & \text{với } x\le 2,\\ (1-a)x & \text{với } x>2\end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

4.67. Chứng minh rằng phương trình

$$x^3+1000x^2+0,1=0$$

có ít nhất một nghiệm âm.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các bài từ 4.68 đến 4.71, hãy chọn phương án đúng trong các phương án đã cho

4.68. a) $\lim\left(\dfrac{n^2-n}{1-2n^2}+\dfrac{2\sin n^2}{\sqrt{n}}\right)$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) -1; (C) $-\dfrac{1}{2}$; (D) 1.

b) $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ là

(A) $-\frac{1}{3}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; (D) -1.

c) $\lim(3^4.2^{n+1}-5.3^n)$ là

(A) $-\infty$; (B) $+\infty$; (C) $-\frac{2}{3}$; (D) $\frac{-5}{81}$.

d) $\lim\frac{3-4^{n+2}}{2^n+3.4^n}$ là

(A) $\frac{4}{3}$; (B) $\frac{16}{3}$; (C) 1 ; (D) $-\frac{16}{3}$.

e) Số thập phân vô hạn tuần hoàn

0,17232323...

được biểu diễn bởi phân số

(A) $\frac{1517}{9900}$; (B) $\frac{153}{990}$; (C) $\frac{164}{990}$; (D) $\frac{1706}{9900}$.

f) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{9}{4}$.

Số hạng đầu của cấp số nhân đó là

(A) 4 ; (B) 5 ; (C) 3 ; (D) $\frac{9}{2}$.

4.69. a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{\frac{x^4+27x}{4x^2-36}}$ là

(A) $-\frac{3}{2}$; (B) $\frac{3}{4}$; (C) $-\frac{3}{4}$; (D) $\frac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (B) 1 ; (C) 0 ; (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{(x^2+x)(x^3+1)}$ là

(A) $+\infty$; (B) 2 ; (C) $-\infty$; (D) -2.

d) $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là

(A) 2 ; (B) 0 ; (C) -2 ; (D) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt{x+2}}{x^2-2x-35}$ là

(A) $-\dfrac{1}{72}$; (B) $-\dfrac{1}{12}$; (C) 0 ; (D) $\dfrac{1}{52}$.

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)$ là

(A) 0 ; (B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$.

4.70. Hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{với } x\neq 0 \text{ và } x\neq -1,\\ 3 & \text{với } x=-1,\\ 1 & \text{với } x=0.\end{cases}$$

(A) Liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn $[-1;0]$;

(B) Liên tục tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$;

(C) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=-1$;

(D) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.

4.71. Hàm số

$$f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{với } x<0,\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{với } 0\le x<1,\\ x^3 & \text{với } x\ge 1.\end{cases}$$

(A) Liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$;

(B) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$;

(C) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$;

(D) Liên tục tại mọi điểm trừ hai điểm $x = 0$ và $x = 1$;

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TỰ LUẬN

4.72. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \sqrt{\dfrac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{(n^2 + n)(n+2)}}$;

b) $u_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{\sqrt{n^7 + 3n^4 + 1}}$;

c) $u_n = \sqrt[3]{n - 2n^3}$;

d) $u_n = 2^n - 4.3^{n+1}$;

e) $u_n = 100n - 2.5^n$;

f) $u_n = \dfrac{3^n - 4^{n+1}}{2^{2n} + 10.3^n + 7}$.

4.73. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 6}. \end{cases} \quad (1)$$

a) Chứng minh rằng $u_n \neq -4$ với mọi n.

b) Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}.$$

Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân. Từ đó tìm giới hạn của dãy (u_n).

4.74. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1 \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $-1 < a < 0$.

a) Chứng minh rằng $-1 < u_n < 0$ với mọi n và (u_n) là một dãy số giảm.

b) Chứng minh rằng

$$0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u_n + 1) \text{ với mọi } n.$$

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

4.75. Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

Tìm $\lim u_n$.

4.76. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{\frac{(x^2+1)(1-2x)}{x^2+x+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to11} \sqrt[3]{\frac{x^2-9x-22}{(x-11)(x^2-3x+16)}}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^3 - x^2 + 10}$;

d) $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \left(\frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x+4}\right)$.

4.77. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2+7x-18}$;

b) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$;

c) $\lim\limits_{x\to4} \frac{3-|x-1|}{|x-2|-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+8x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

4.78. a) Chứng minh rằng phương trình

$$x^3 - 10000x^2 - \frac{1}{100} = 0$$

có ít nhất một nghiệm dương.

b) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, phương trình

$$x^3 + 2x^2 + bx + c = 0$$

có ít nhất một nghiệm.

C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

4.1. a), b) Học sinh tự làm.

c) Vì $\left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1}\right| = \frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}+1} \le \frac{1}{n}$ với mọi n và $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên

$$\lim\frac{\sin n}{n\sqrt{n}+1} = 0.$$

4.2. a) Học sinh tự làm.

b) $0 \le v_n \le \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$.

Do đó $\lim v_n = 0$.

4.3. a) $0 < u_n = \frac{(\sqrt{5})^n}{3^n+1} < \frac{(\sqrt{5})^n}{3^n} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$ với mọi n.

Vì $0 < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ nên $\lim\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n = 0$. Do đó $\lim u_n = 0$.

b) Học sinh tự làm.

c) $|u_n| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ với mọi n.

Vì $\lim\frac{1}{2^n} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d) *Hướng dẫn.* $0 \le u_n \le \frac{n+1}{\sqrt{n}(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi n.

4.4. *Hướng dẫn*

a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ với mọi n.

Từ đó suy ra

$$u_2 \le \frac{3}{4}u_1,$$

$$u_3 \le \frac{3}{4}u_2 \le \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_1, ...$$

$$0 \le u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

4.5. *Hướng dẫn.* Chứng minh tương tự như bài 4.4.

4.6. *Hướng dẫn*

a) Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n^2+1}+n$, ta được

$$2\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+n} \le \frac{2}{n+n} = \frac{1}{n}$$

b) Tương tự.

4.7. a) 3 ; b) -1 ;

c) $u_n = \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n+1-1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$ với mọi n.

Vì $\lim\left(-\frac{1}{2n+1}\right) = 0$ nên $\lim u_n = 1$;

d) $u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)}$ với mọi n.

Do đó $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

e) 5 ; f) $\frac{1}{2}$.

4.8. a) $-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn . Chia tử và mẫu của phân thức cho n^5.

b) $\sqrt{2}$; c) 0 ; d) 1 ;

e) Chia tử và mẫu của phân thức cho 3^n, ta được

$$u_n = \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}.$$

Vì $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = \frac{5.0-1}{2.0+3} = -\frac{1}{3}$.

f) Dễ dàng tìm được

$$\lim\frac{n^6+3n^3-3}{2n^6+n^5+2} = \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$\lim\sqrt{\frac{n^6+3n^3-3}{2n^6+n^5+2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.9. Với mọi n,

$$|u_n v_n| = |u_n||v_n| \le c|u_n|$$

Vì $\lim u_n = 0$ nên $\lim\left(c|u_n|\right) = 0$. Từ đó suy ra

$$\lim(u_n v_n) = 0.$$

4.10. Vì

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \text{ với mọi } k = 1, 2, 3, \ldots, n, \text{ nên}$$

$0 < u_n \le \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi n.

Vì $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, nên từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

4.11. a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

b) $u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{u_n}+1} \le \dfrac{u_n-1}{2}$ với mọi n vì $\sqrt{u_n} > 1$.

c) Đặt $v_n = u_n - 1$, ta có

$$0 < v_{n+1} \le \frac{1}{2}v_n \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\quad v_2 \le \frac{1}{2}v_1, \quad v_3 \le \frac{1}{2}v_2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 v_1.$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$0 < v_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = 9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Vì $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ nên từ đó suy ra $\lim v_n = 0$.

Vậy $\lim u_n = 1$.

4.12. a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 18 = \frac{2}{3}u_n - 6 + 18 = \frac{2}{3}u_n + 12.$

Thay $u_n = v_n - 18$ vào đẳng thức trên, ta được

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - 18) + 12 = \frac{2}{3}v_n.$$

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{2}{3}$.

b) Tổng của cấp số nhân (v_n) là

$$S = \frac{v_1}{1-q} = \frac{13}{1-\frac{2}{3}} = 39.$$

Vì $\lim v_n = 0$ nên $\lim u_n = -18$.

4.13. Tổng các cạnh nằm trên tia Ax của các hình vuông đó là

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2^2} + \ldots = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = 20 \text{ (cm)}.$$

4.14. Đặt $h_1 = 81$ (m). Sau lần chạm đất đầu tiên, quả bóng nảy lên một độ cao là $h_2 = \frac{2}{3}h_1$. Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao h_2, chạm đất và nảy lên độ cao $h_3 = \frac{2}{3}h_2$ rồi rơi từ độ cao h_3 và cứ tiếp tục như vậy. Sau lần chạm đất thứ n từ độ cao h_n, quả bóng nảy lên độ cao $h_{n+1} = \frac{2}{3}h_n, \ldots$. Tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa là

$$d=(h_1+h_2+h_3+...+h_n+...)$$
$$+(h_2+h_3+...+h_n+...).$$

d là tổng của hai cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu, theo thứ tự là h_1, h_2 và có cùng công bội $q=\frac{2}{3}$. Do đó

$$d=\frac{h_1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{h_2}{1-\frac{2}{3}}=3(h_1+h_2)=405 \text{ (m)}.$$

4.15. a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{13}{33}$;

c) $0,27323232...=\frac{27}{100}+\frac{32}{10000}+\frac{32}{10000}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{32}{10000}\left(\frac{1}{100}\right)^2+...$

Dãy số

$$\frac{32}{10000},\frac{32}{10000}\left(\frac{1}{100}\right),\frac{32}{10000}\left(\frac{1}{100}\right)^2,...$$

là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=\frac{32}{10000}$ và công bội $q=\frac{1}{100}$. Tổng của nó là $S=\frac{u_1}{1-q}$:

$$\frac{32}{10000}+\frac{32}{10000}\left(\frac{1}{1000}\right)+\frac{32}{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^2+...=\frac{32}{10000}\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{32}{9900}.$$

Do đó

$$0,27323232...=\frac{27}{100}+\frac{32}{9900}=\frac{541}{1980}.$$

4.16. • Nếu $a=b$ thì $\lim u_n=0$.

• Nếu $a<b$ thì chia tử và mẫu của phân thức cho b^n. Từ đó tìm được $\lim u_n=-1$.

• Nếu $a>b$ thì chia tử và mẫu của phân thức cho a^n. Từ đó tìm được $\lim u_n=1$.

4.17. Chỉ cần chứng minh cho trường hợp $0 < q < 1$. Khi đó, đặt $p = \frac{1}{q}$, ta được $p > 1$. Do đó

$$p = 1 + h \text{ với } h = p - 1 > 0.$$

Ta có

$$\frac{1}{q^n} = p^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \text{ với mọi } n.$$

Do đó

$$0 < q^n < \frac{1}{h}.\frac{1}{n} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim \frac{1}{n} = 0$ nên từ đó suy ra

$$\lim q^n = 0.$$

4.18. Cả hai dãy số (u_n) và (v_n) đều không có giới hạn.

4.19. a) Đặt $w_n = u_n + v_n$. Ta chứng minh dãy số (w_n) không có giới hạn hữu hạn, bằng phản chứng. Giả sử $\lim w_n = M \in \mathbb{R}$. Khi đó $\lim v_n = \lim (w_n - u_n) = = M - L$. Ta đi đến mâu thuẫn.

b) Chứng minh tương tự câu a) : Dãy số $(-1)^n$ không có giới hạn hữu hạn và dãy số $\left(\frac{1}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn $\left(\lim \frac{1}{n} = 0\right)$. Do đó dãy số $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

4.20. a) Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

b) Dãy $(u_n + v_n)$ có thể có giới hạn hữu hạn hoặc không có giới hạn hữu hạn. Chẳng hạn hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = (-1)^n$ và $v_n = (-1)^{n+1}$ đều không có giới hạn hữu hạn, nhưng dãy số $(u_n + v_n)$ là dãy số có giới hạn hữu hạn ($u_n + v_n = 0$ với mọi n).

Nếu (u_n) là một dãy số không có giới hạn hữu hạn thì dãy số $(u_n + u_n) = (2u_n)$ không có giới hạn hữu hạn.

4.21. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$;

d) $\sqrt{2n^3+n^2-2} = n\sqrt{n}\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$ với mọi n.

Vì $\lim\left(n\sqrt{n}\right) = +\infty$ và $\lim\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \sqrt{2} > 0$ nên

$\lim\sqrt{2n^3+n^2-2} = +\infty$.

4.22. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$;

d) Chia tử và mẫu của phân thức cho n^2, ta được

$$u_n = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}}}$$

Vì $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right) = -6 < 0$, $\lim\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}} = 0$

và $\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{7}{n^4}-\frac{5}{n^6}} > 0$ với mọi n nên $\lim u_n = -\infty$.

4.23. a) $\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{n^2+1} = \dfrac{n^2+2}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}$ với mọi n.

Do đó

$$\lim\left(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right) = +\infty ;$$

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$.

4.24. a) $+\infty$;

b) $3.2^n - 5^{n+1} + 10 = 5^n\left[3\left(\frac{2}{5}\right)^n - 5 + \frac{10}{5^n}\right]$ với mọi n.

Vì $\lim 5^n = +\infty$ và $\lim\left[3\left(\frac{2}{5}\right)^n - 5 + \frac{10}{5^n}\right] = -5 < 0$ nên

$$\lim\left(3.2^n - 5^{n+1} + 10\right) = -\infty ;$$

c) $+\infty$;

d) Chia tử và mẫu của phân thức cho 5^n, ta được

$$u_n = \frac{2^{n+1} - 3.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n} = \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 + \frac{3}{5^n}}{3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\left[2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 + \frac{3}{5^n}\right] = -3 < 0$, $\lim\left[3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] = 0$

và $3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 7\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$ với mọi n nên $\lim u_n = -\infty$.

4.25. a) 0 ; b) 0 ; c) 0 ; d) 0.

4.26. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ là số nhỏ nhất trong n số

$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Do đó

$$u_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ số hạng}} = n.\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\sqrt{n} = +\infty$ nên từ đó suy ra $\lim u_n = +\infty$.

4.27. a) Học sinh tự làm.

b) Vì $q > 1$ nên tồn tại số dương h sao cho $h = q - 1 > 0$. Từ bất đẳng thức trong câu a) suy ra

$$q^n = (1+h)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

Do đó

$$\frac{q^n}{n} \geq \frac{h^2}{2}(n-1) \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\frac{h^2}{2}(n-1) = +\infty$ nên từ đó suy ra

$$\lim\frac{q^n}{n} = +\infty.$$

c) Từ b) suy ra $\lim \frac{n}{q^n} = 0$.

4.28. Nếu $q > 1$ thì $\sqrt{q} > 1$. Từ bài tập 4.27c suy ra $\lim \frac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n} = 0$.

Vì $\frac{n^2}{q^n} = \frac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n} \cdot \frac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n}$ nên $\lim \frac{n^2}{q^n} = 0$.

Nhận xét. Một cách tương tự, có thể chứng minh được rằng nếu $q > 1$ và k là một số nguyên dương thì

$$\lim \frac{n^k}{q^n} = 0.$$

4.29. a) Chia tử và mẫu của phân thức cho 3^n, ta được

$$u_n = \frac{2n - 3^n}{n + 2^n} = \frac{\dfrac{2n}{3^n} - 1}{\dfrac{n}{3^n} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n} \text{ với mọi } n.$$

Theo bài tập 4.27, ta có $\lim \frac{n}{3^n} = 0$. Do đó

$\lim \left(\frac{2n}{3^n} - 1\right) = -1$, $\lim \left[\frac{n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 0$. Vì $\frac{n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ với mọi n nên từ đó suy ra $\lim u_n = -\infty$.

b) $-\infty$.

4.30. a) Suy ra từ định nghĩa của dãy số có giới hạn $+\infty$;

b) Vì $\lim |v_n| = +\infty$ nên $\lim \frac{1}{v_n} = 0$. Do đó

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \left(u_n . \frac{1}{v_n}\right) = \left(\lim u_n\right) \lim \frac{1}{v_n} = L.0 = 0.$$

c) Giả sử $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = L$. Khi đó

$$u_n + v_n = u_n\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right).$$

Theo b), ta có $\lim \frac{v_n}{u_n} = 0$. Vì $\lim u_n = +\infty$ và $\lim\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right) = 1 > 0$ nên $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

Nhận xét. Tương tự, có thể chứng minh được rằng

a) Nếu dãy số (u_n) bị chặn (tức là tồn tại một số dương M sao cho $|u_n| \le M$ với mọi n) và $\lim|v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$;

b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hay $-\infty$) và (v_n) là một dãy số bị chặn thì

$$\lim(u_n + v_n) = +\infty \text{ (hay } -\infty\text{)}.$$

4.31. a) 10 ; b) $\frac{1}{2}$; c) -3 ; d) $\frac{1}{2}$.

4.32. a) $\frac{1}{2}$; b) 0 ; c) $+\infty$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.33. a) Chia tử và mẫu của phân thức cho 3^n, ta được

$$u_n = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + \frac{11}{3^n}}{9 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{3^n}} \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ nên

$$\lim u_n = -\frac{1}{9}.$$

b) Chia tử và mẫu của phân thức cho 4^n, ta được

$$u_n = \frac{13\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{5n}{4^n}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 5} \text{ với mọi } n.$$

Ta biết rằng nếu $q > 1$ thì $\lim \frac{n}{q^n} = 0$ (xem bài tập 4.27c).

Do đó $\lim \frac{5n}{4^n} = 5\lim \frac{n}{4^n} = 5.0 = 0$. Ngoài ra, ta có $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ và $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Do đó

$$\lim \left[13\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{5n}{4^n}\right] = 0 \text{ và } \lim \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 5\right] = 5 \neq 0.$$

Vậy $\lim u_n = \frac{0}{5} = 0$.

4.34. a) $-\infty$;	b) $+\infty$;	c) $-\infty$;

d) $\sqrt{3.4^n - n + 2} = 2^n \sqrt{3 - \frac{n}{4^n} + \frac{2}{4^n}}$ với mọi n.

Vì $\lim 2^n = +\infty$ và $\lim \sqrt{3 - \frac{n}{4^n} + \frac{2}{4^n}} = \sqrt{3} > 0$ nên

$$\lim \sqrt{3.4^n - n + 2} = +\infty.$$

4.35. a) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$ với mọi n.

Do đó

$$\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = 2\lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 2.\frac{1}{2} = 1.$$

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}} = \lim \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n+1}}{n} = 0$;

c) $(2n-1)\sqrt{\frac{2n+3}{n^4 - n^2 + 2}} = \sqrt{\frac{(2n-1)^2(2n+3)}{n^4 - n^2 + 1}}$ với mọi n.

Vì $\lim \frac{(2n-1)^2(2n+3)}{n^4-n^2+1} = 0$ nên

$$\lim(2n-1)\sqrt{\frac{2n+3}{n^4-n^2+2}} = \sqrt{0} = 0;$$

d) $\frac{3^n+2^{n+1}}{5n+3^{n+1}} = \frac{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{5n}{3^n}+3}$ với mọi n.

Do đó

$$\lim\frac{3^n+2^{n+1}}{5n+3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

và

$$\lim\sqrt{\frac{3^n+2^{n+1}}{5n+3^{n+1}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.36. Gọi u_1 là số hạng đầu, q là công bội và S là tổng của cấp số nhân đã cho.

Khi đó $S = \frac{u_1}{1-q}$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 12 \\ u_1(1-q) = \frac{3}{4} \\ u_1 > 0. \end{cases}$$

Nhân hai phương trình đầu của hệ trên với nhau, ta được

$$u_1^2 = 9.$$

Vì $u_1 > 0$ nên từ đó ta có $u_1 = 3$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$3(1-q) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow q = \frac{3}{4}$$

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \frac{3}{4}$.

4.37. a) Với mọi n, ta có

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{2} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n.$$

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$.

b) Ta có

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + ... + (v_n + 1)$$
$$= (v_1 + v_2 + ... + v_n) + n = s_n + n,$$

trong đó s_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n). Tổng của cấp số nhân (v_n) là

$$s = \lim s_n = \frac{v_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Do đó

$$\lim S_n = \lim\left(s_n + n\right) = +\infty.$$

4.38. a) 3. Hướng dẫn : Với mọi $x \neq -1$, $\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2} = \frac{x+4}{x+2}$;

b) $+\infty$; c) 0 ; d) $+\infty$.

4.39. a) Lấy hai dãy số (x_n) và (x'_n) với

$x_n = n\pi$, $x'_n = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (như trong hướng dẫn).

Khi đó $\lim x_n = +\infty$ và $\lim x'_n = +\infty$;

$$\lim f(x_n) = \lim \sin 2x_n = \lim \sin 2n\pi = 0 \text{ và}$$

$$\lim f(x'_n) = \lim \sin 2x'_n = \lim \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Vì $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin 2x$.

Cách giải khác. Lấy dãy số (x_n) với

$$x_n = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

ta có $\lim x_n = +\infty$ và

$$f(x_n) = \sin 2x_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{với } n \text{ chẵn,} \\ -1 & \text{với } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Dãy số $\left(f(x_n)\right) = \left(\sin 2x_n\right)$ không có giới hạn. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin 2x$.

b) Làm tương tự câu a)

c) Chọn dãy (x_n) sao cho

$$\frac{1}{2x_n} = n\pi \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

Khi đó $\lim x_n = 0$ và

$$f(x_n) = \cos\frac{1}{2x_n} = \cos n\pi = \begin{cases} 1 & \text{với } n \text{ chẵn,} \\ -1 & \text{với } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Dãy số $\left(f(x_n)\right) = \left(\cos\frac{1}{2x_n}\right)$ không có giới hạn. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{2x}$;

d) Học sinh tự làm.

4.40. Giả sử hàm số f xác định trên một khoảng I chứa điểm x_0 và (x_n) là một dãy số trong tập hợp $I \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$. Khi đó vì $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ nên $\lim |f(x_n)| = 0$. Từ đó suy ra $\lim f(x_n) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

4.41. *Hướng dẫn.* Hãy chứng minh rằng, với mọi dãy số (x_n) trong $(a ; b) \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta có $\lim f(x_n) = 0$.

4.42. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Hướng dẫn. Áp dụng bài tập 41.

4.43. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$.

Hướng dẫn. Điều cần chứng minh suy ra từ bất đẳng thức :

$0 \le f(x) - 1 \le x^2 - 4x + 4$ với $0 < |x-2| < 1$.

4.44. a) 81 ; b) 1 ; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$; e) $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

f) Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1} = -1;$$

g) $\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x} = \frac{2-x}{x}$ với mọi $x \neq -3$.

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{2-x}{x} = -\frac{5}{3}$. Do đó

$\lim\limits_{x\to -3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right| = \left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$.

h) $\frac{(x^2-x-6)^2}{x^3+2x^2} = \frac{(x-3)^2(x+2)}{x^2}$ với mọi $x \neq 2$.

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^2-x-6)^2}{x^3+2x^2} = 0.$

4.45. a) $-\frac{2}{3}$; b) 0 ;

c) $x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}}$ với mọi $x > 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

d) $-\sqrt{2}$.

4.46. a) $+\infty$; b) $-\infty$;

c) Với $x > -2$, ta có $3x+6 = 3(x+2) > 0$. Do đó

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{3x+6}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^+} 3 = 3 \ ;$$

d) -3.

4.47. a) $\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{2-x}} = (1-x)\sqrt{2-x}$, với mọi $x < 2$.

Do đó

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-} (1-x)\sqrt{2-x} = 0 \ ;$$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4.48. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-9} = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$.

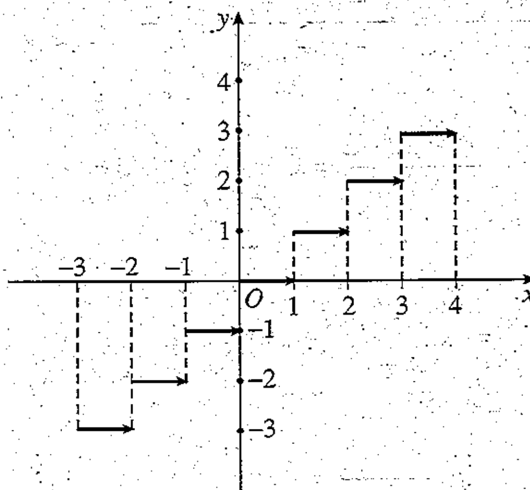
Do đó

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0.$$

4.49. Đồ thị (h.4.2). Với $2 < x < 3$, $[x] = 2$; do đó $\lim\limits_{x\to 3^-} [x] = 2$.

Với $3 < x < 4$, $[x] = 3$; do đó $\lim\limits_{x\to 3^+} [x] = 3$.

Vì $\lim\limits_{x\to 3^-} [x] \neq \lim\limits_{x\to 3^+} [x]$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} [x]$.



Hình 4.2

4.50. a) $-\dfrac{1}{8}$; b) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$;

c) $\dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x+2)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$ với mọi $x\neq -2$. Do đó

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+5}{x+1}=-15\ ;$$

d) $\dfrac{6}{5}$.

4.51. a) $\dfrac{2}{3}$; b) $\dfrac{2}{5}$; c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

d) Với mọi $x<0$, ta có

$$\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{2x-3}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=\frac{2x-3}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=\frac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=-1.$$

4.52. a) 0 ;

b) Với $x<-1$, ta có $x+1<0$. Do đó $|x+1|=-x-1$ và

$$\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}=\frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)}=-x-2.$$

Từ đó

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^-}(-x-2)=-1.$$

c) 1 ; d) 0.

4.53. a) $-\infty$; b) $+\infty$.

4.54. a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3)=-3$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+x^2)=0$ và $x^3+x^2=x^2(1+x)>0$ với mọi $x>-1$ và $x\neq 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3+x^2}=-\infty\ ;$$

b) $\dfrac{|2-x|}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{|x-2|}$ với mọi $x \neq 2$.

Do đó

$$\lim_{x\to 2}\frac{|2-x|}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}=+\infty\,;$$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+}(1-2x^2)=-17<0$, $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0$ và $x-3>0$ với mọi $x>3$.

Do đó

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1-2x^2}{x-3}=-\infty\,;$$

d) Với mọi $x>2$, ta có

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{x-2}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}.$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$ và $\sqrt{x-2}>0$ với mọi $x>2$. Do đó

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=+\infty.$$

4.55. a) $+\infty$;

b) $+\infty$.

4.56. a) Với mọi $x\neq 3$,

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x-3)^3}=\frac{3-x}{3x}\cdot\frac{1}{(x-3)^3}=\left(-\frac{1}{3x}\right)\cdot\frac{1}{(x-3)^2}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 3}\left(-\dfrac{1}{3x}\right)=-\dfrac{1}{9}<0$ và $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=+\infty$ nên

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x-3)^3}=-\infty\,;$$

b) $\dfrac{4x^4-3}{2x^2+3x-2}=\dfrac{4x^4-3}{2x-1}\cdot\dfrac{1}{x+2}$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{4x^4-3}{2x-1} = \dfrac{-61}{5} < 0$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ nên

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{4x^4-3}{2x^2+3x-2} = -\infty.$$

Cách giải khác

Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} (4x^4-3) = 61 > 0$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} (2x^2+3x-2) = 0$ và $2x^2+3x-2 < 0$ với $-2 < x < \dfrac{1}{2}$ nên

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{4x^4-3}{2x^2+3x-2} = -\infty.$$

4.57. a) $\dfrac{12}{7}$;

b) $\dfrac{11}{17}$.

Hướng dẫn.

$$\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \frac{(2x^2+x+1)(x-3)}{(4x^2-x+1)(x-3)} = \frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1} \text{ với mọi } x \neq 3\ ;$$

c) 27. *Hướng dẫn.* Với mọi $x \neq 0$

$$\frac{(x+3)^3-27}{x} = \frac{x^3+9x^2+27x+27-27}{x} = x^2+9x+27.$$

d) $\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = \dfrac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x}$.

Với $x < 0$, $\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = \dfrac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x} = \dfrac{-\sqrt{3+x^2}}{2}$. Do đó

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tương tự, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$;

e) 2 ;

f) Với mọi $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{-x-2}{x^2+x+1}$$

Do đó

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{x^2+x+1}=-1.$$

4.58. a) $+\infty$;

b) Với mọi $x<-1$, ta có $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

$$(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}=-\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{x^3+x+2}},\ \lim_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}=-\sqrt{2}.$$

4.59. a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{56}$; c) $-\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn. c) Nhân tử và mẫu của phân thức cho $\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}$ và đơn giản phân thức nhận được, ta có

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\frac{4}{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}\ \text{với } x\neq 3.$$

d) $$\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}=\frac{(x-3)(3+\sqrt{6x-x^2})}{9-6x+x^2}=\frac{3+\sqrt{6x-x^2}}{x-3}.$$

Vì $\lim_{x\to 3^-}\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)=6>0$, $\lim_{x\to 3^-}(x-3)=0$ và $x-3<0$ với mọi $x<3$ nên

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}=-\infty.$$

e) Nhân tử và mẫu của phân thức với $\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)$, ta được

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}\ \text{với } x\neq 2.$$

Do đó

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{3}{2};$$

f) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4.60. a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4)=8$; $f(2)=5$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)$ nên hàm số f gián đoạn tại điểm $x=2$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4=f(-2)$. Vậy hàm số f liên tục tại điểm $x=-2$.

c) Hàm số gián đoạn tại điểm $x=0$;

d) Hàm số liên tục tại điểm $x=-2$.

4.61. a) Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$x^2+7x+10\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \text{ và } x\neq -5.$$

Hàm số f liên tục trên các khoảng $(-\infty ; -5)$, $(-5 ; -2)$ và $(-2 ; +\infty)$.

b) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$; c) $[0 ; +\infty)$;

d) Hai hàm số $u(x)=x+1$ và $v(x)=\sin x$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)=(x+1)\sin x$ là tích của hai hàm số trên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

4.62. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax-3)=2a-3=f(1)$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$ khi và chỉ khi

$$2a-3=1 \Leftrightarrow a=2.$$

Hiển nhiên hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$. Vậy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a=2$.

4.63. Nếu $f(0)=0$ hoặc $f(1)=1$ thì hiển nhiên điều khẳng định là đúng.

Giả sử $f(0)\neq 0$ và $f(1)\neq 1$. Xét hàm số $g(x)=f(x)-x,\ x\in[0\,;1]$. Hàm số g liên tục trên đoạn $[0\,;1]$. Vì với mọi $x\in[0\,;1]$, $0\leq f(x)\leq 1$ nên $f(0)>0$ và $f(1)<1$. Do đó

$$g(0)=f(0)-0>0 \text{ và } g(1)=f(1)-1<0.$$

Vì $g(0)g(1)<1$ nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một số thực $c\in(0\,;1)$ sao cho $g(c)=f(c)-c=0$, tức là $f(c)=c$.

4.64. a) $-\dfrac{4}{9}$; b) 12 ; c) $-\infty$.

Hướng dẫn. c) $\dfrac{2x+1}{(x+3)(x^3+27)}=\dfrac{1}{(x+3)^2}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2-3x+9}$;

d) 0.

4.65. a) $-\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn. Giải tương tự như bài 59e).

b) 0 ; c) 0 ;

d) Vì $1-2x<0$ với mọi $x>\dfrac{1}{2}$ nên

$$1-2x=-\sqrt{(1-2x)^2} \text{ với mọi } x>\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$(1-2x)\sqrt{\frac{3x-1}{x^3+1}}=-\sqrt{\frac{(1-2x)^2(3x-1)}{x^3+1}}$$

và

$$\lim_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-1}{x^3+1}}=-2\sqrt{3}.$$

4.66. $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(a^2x^2\right)=4a^2=f(2)$,

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(1-a)x=2(1-a)$.

Hàm số f liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi

$$4a^2 = 2(1-a) \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi

$$a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{1}{2}.$$

Hiển nhiên hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$ với mọi a.

Vậy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$a = -1,\ a = \frac{1}{2}.$$

4.67. Hàm số $f(x) = x^3 + 1000x^2 + 0{,}1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(0) = 0{,}1 > 0$. Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số âm a sao cho $f(a) < 0$.

Vì $f(0)f(a) < 0$ nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (a\ ;\ 0)$ sao cho $f(c) = 0$. Số $x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.

4.68. a) (C) ; b) (B) ; c) (A) ; d) (D) ;
e) (D) ; f) (C).

4.69. a) (D) ; b) (D) ; c) (C) ;
d) (B) ; e) (A) ; f) (B).

4.70. (B).

4.71. (C).

4.72. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Hướng dẫn.* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $+\infty$. *Hướng dẫn.* $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

c) $-\infty$; d) $-\infty$;

Hướng dẫn d). $u_n = 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 12\right]$ với mọi n ;

e) $u_n = 5^n\left(\dfrac{100n}{5^n} - 2\right)$ với mọi n.

Theo bài tập 27c), nếu $q > 1$ thì $\lim \dfrac{n}{q^n} = 0$. Do đó $\lim \dfrac{n}{5^n} = 0$. Vì $\lim 5^n = +\infty$ và $\lim\left(\dfrac{100n}{5^n} - 2\right) = -2 < 0$ nên

$$\lim u_n = -\infty;$$

f) Ta có $2^{2n} = 4^n$. Do đó

$$u_n = \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 4}{1 + 10\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \dfrac{7}{4^n}} \text{ với mọi } n.$$

Do đó $\lim u_n = -4$.

4.73. a) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Ta có $u_1 = 1 \neq -4$.

Giả sử $u_n \neq -4$. Ta chứng minh $u_{n+1} \neq -4$. Thật vậy,

$$u_{n+1} = -4 \Leftrightarrow \frac{u_n - 4}{u_n + 6} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \neq -6 \\ u_n - 4 = -4(u_n + 6) \end{cases} \Leftrightarrow u_n = -4.$$

Điều này trái với giả thiết quy nạp.

b) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \frac{2u_n + 2}{5u_n + 20} = \frac{2}{5}\cdot\frac{u_n + 1}{u_n + 4} = \frac{2}{5}v_n \text{ với mọi } n.$$

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{2}{5}$. Đó là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Vì $v_n = v_1\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ với mọi n nên $\lim v_n = 0$.

Từ đẳng thức trong b) suy ra $u_n = \dfrac{4v_n - 1}{1 - v_n}$. Do đó

$$\lim u_n = -1.$$

4.74. a) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Theo giả thiết, điều khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử điều khẳng định đúng với n, tức là

$$-1 < u_n < 0 \qquad (2)$$

Ta chứng minh nó đúng với $n+1$. Thật vậy, từ (2) suy ra

$$0 < u_n + 1 < 1\ ;$$

Do đó

$$0 < \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} < 1$$

và

$$-1 < \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1 < 0,$$

tức là

$$-1 < u_{n+1} < 0.$$

Vì $-1 < u_n < 0$ nên $u_n + 1 > 0$ và $u_n^2 > 0$ với mọi n. Do đó từ (1) suy ra $u_{n+1} < (u_n + 1) - 1 = u_n$ với mọi n.

Vậy (u_n) là một dãy số giảm.

b) Từ đẳng thức (1) suy ra

$$u_{n+1} + 1 = \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}(u_n + 1) \text{ với mọi } n. \qquad (3)$$

Vì (u_n) là một dãy giảm, $-1 < u_n < 0$ với mọi n và $u_1 = a$ nên

$$-1 < u_n \le a < 0 \text{ với mọi } n.$$

Từ đó suy ra

$$|u_n| \ge |a| \Leftrightarrow u_n^2 \ge a^2\ ;$$

do đó

$$\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \text{ với mọi } n$$

và từ (3), ta có

$$u_{n+1} + 1 \le \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u_n + 1) \text{ với mọi } n.$$

Đặt $v_n = u_n + 1$ và $q = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, ta có $0 < q < 1$, $v_n > 0$ và

$$v_{n+1} \le qv_n \text{ với mọi } n.$$

Từ đó ta có

$$v_2 \le v_1 q = (a+1)q,$$

$$v_3 \le v_2 q \le (a+1)q^2, ...,$$

$$0 \le v_n \le (a+1)q^{n-1}$$

với mọi n. Vì $\lim(a+1).q^{n-1} = (a+1)\lim q^{n-1} = 0$ nên từ đó suy ra

$$\lim v_n = 0 \text{ và } \lim u_n = -1.$$

4.75. Ta có $u_2 = 1 + \dfrac{a}{2}, u_3 = 1 + \dfrac{u_2}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{2^2}$.

Bằng phương pháp quy nạp dễ dàng chứng minh được rằng :

$u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^{n-2}} + \dfrac{a}{2^{n-1}}$, với mọi $n \ge 3$.

Do đó $u_n = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} + \dfrac{a}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-2}} + \dfrac{a}{2^{n-1}}$, với mọi $n \ge 3$.

Vậy $\lim u_n = 2$.

4.76. a) $\sqrt{6}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $+\infty$;

d) $\dfrac{2}{x^2+3x-4} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{2}{(x-1)(x+4)} - \dfrac{3}{x+4}$

$= \dfrac{5-3x}{(x-1)(x+4)} = \dfrac{1}{x+4}.\dfrac{5-3x}{x-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{1}{x+4} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-4)^-} \dfrac{5-3x}{x-1} = -\dfrac{17}{5} < 0$ nên

$$\lim_{x\to(-4)^-}\left(\frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x+4}\right) = +\infty.$$

4.77. a) $\frac{3}{44}$; b) 0 ;

c) Với $x > 2$, ta có $|x-1| = x-1$ và $|x-2| = x-2$. Do đó

$$\frac{3-|x-1|}{|x-2|-2} = \frac{3-(x-1)}{x-2-2} = \frac{4-x}{x-4} = -1 \text{ với } x > 2 \text{ và } x \neq 4.$$

Do đó

$$\lim_{x \to 4} \frac{3-|x-1|}{|x-2|-2} = \lim_{x \to 4}(-1) = -1 \ ;$$

d) $-\frac{9}{2}$.

4.78. a) Hàm số $f(x) = x^3 - 10000x^2 - \frac{1}{100}$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(0) = -\frac{1}{100} < 0$. Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên với một số dương b đủ lớn, ta có $f(b) > 0$. Vì $f(0)f(b) < 0$ nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (0 ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Vậy $x = c$ là một nghiệm dương của phương trình đã cho.

b) *Hướng dẫn.* Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

• Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là *hệ số góc của tiếp tuyến* của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

• Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

• Định nghĩa đạo hàm cấp n

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2).$$

• Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Cho phương trình chuyển động $s = s(t)$; ta có

+ Vận tốc tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$

+ Gia tốc tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = s''(t_0)$

• Định nghĩa vi phân

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

• Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

• Bảng tóm tắt cần nhớ :

Các quy tắc tính đạo hàm	Đạo hàm của một số hàm số (ở đây $u = u(x)$)
$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$ (*) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$ $(\sin u)' = (\cos u)\,u'$ $(\cos u)' = -(\sin u).u'$ $(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'$ $(\cot u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}.u'$

B – ĐỀ BÀI

§1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

5.1. Cho hàm số

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Chứng minh rằng $y'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x \neq 0)$.

5.2. Cho parabol $(\mathscr{P})$ có phương trình

$$y = x^2.$$

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $(\mathscr{P})$

a) Tại điểm $(-2\,;\,4)$;

b) Tại giao điểm của $(\mathscr{P})$ với đường thẳng $y = 3x - 2$.

(*) Ở đây ta xem $u = u(x)$ và $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Đặc biệt nếu $u = C$ (C là hằng số) thì $u' = 0$ và nếu $u = x$ thì $u' = 1$.

5.3. Cho hàm số

$$f(x)=x^3 \ (\mathscr{C}).$$

a) Tại những điểm nào của $(\mathscr{C})$ thì tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ có hệ số góc bằng 1.

b) Liệu có tiếp tuyến nào của $(\mathscr{C})$ mà tiếp tuyến đó có hệ số góc âm ?

5.4. Cho parabol $(\mathscr{P})$ có phương trình

$$y=f(x)=kx^2 \ (k \text{ là hằng số khác } 0)$$

và A là một điểm thuộc $(\mathscr{P})$ có hoành độ là $a \neq 0$.

Hãy xác định các toạ độ giao điểm của trục Ox với tiếp tuyến tại A của $(\mathscr{P})$. Từ đó hãy suy ra một cách đơn giản để vẽ tiếp tuyến này.

5.5. Cho hàm số

$$f(x)=\sqrt{|x|^3}.$$

Tính $f'(0)$ nếu có.

5.6. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm nếu có của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & \text{khi } x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{khi } x>2 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{khi } x\geq 1 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\leq 0 \\ -x^3+1 & \text{khi } x>0. \end{cases}$

5.7. Một viên đạn được bắn lên trời từ một vị trí cách mặt đất 1000m theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $v_0=245$m/s (bỏ qua sức cản của không khí).

a) Tìm thời điểm t_0 tại đó viên đạn đạt độ cao lớn nhất và sẽ bắt đầu rơi. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?

b) Sau bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn), viên đạn rơi xuống đến mặt đất ?

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

5.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$ (m, n là các hằng số) ;

b) $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$;

c) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;

d) $y = \frac{v^3 - 2v}{v^2 + v + 1}$;

e) $y = \frac{1}{t^2 - 3t + 1}$.

5.9. Cho hàm số

$$f(x) = 3x - 2\sqrt{x}.$$

Tính $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$ và $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

5.10. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (1 - x)^{20}$;

b) $y = \left(t^3 - \frac{1}{t^3} + 3t\right)^5$;

c) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$;

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (a là hằng số).

5.11. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = f(x^2)$;

b) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$,

biết rằng f và g là các hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

5.12. Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số chẵn là hàm số lẻ và đạo hàm của hàm số lẻ là hàm số chẵn, biết rằng các hàm số đó có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

5.13. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3.$$

Tìm m để

a) $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;

b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x ;

c) $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0 ; 2)$;

d) $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

5.14. Cho hàm số

$$f(x)=\frac{mx^3}{3}-\frac{mx^2}{2}+(3-m)x-2.$$

Tìm m để

a) $f'(x)>0$ với mọi x ;

b) $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu ;

c) Chứng minh rằng trong trường hợp $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) thì các nghiệm này thoả mãn một hệ thức độc lập với m.

5.15. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f'(x)=0$ với sai số tuyệt đối không vượt qua 10^{-4}, biết :

a) $f(x)=x^3-x^2-3x+1$;

b) $f(x)=x^4+x^3-2x^2-1$.

5.16. Cho hàm số

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}.$$

Giải bất phương trình

$$f'(x)\le 1.$$

5.17. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số

$$y=x^3-5x^2+2.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y=-3x+1$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{7}x-4$;

c) Đi qua điểm $A(0\,;2)$.

5.18. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số

$$y=f(x)=-x^4+2x^2+x.$$

Chứng minh rằng, tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $A(-1\,;0)$ cũng là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại một tiếp điểm khác. Tìm các toạ độ của tiếp điểm đó.

§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

5.19. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\sin^2 3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

5.20. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$;

b) $y=\dfrac{\tan t}{t}$;

c) $y=\dfrac{t\sin t}{1+\tan t}$;

d) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$;

e) $y=\cot\sqrt{x^2-x+1}$;

g) $y=\sin(2\sin x)$;

h) $y=\cos^3 4x$;

i) $y=\sin^2(\cos 3x)$.

5.21. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ và $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ (nếu có) biết

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

5.22. Cho hai hàm số

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x \text{ và } g(x)=\frac{1}{4}\cos 4x.$$

Chứng minh rằng

$$f'(x)=g'(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R}).$$

5.23. Chứng minh các công thức sau ($n\in\mathbb{N}, n\geq 2$)

a) $(\sin^n x.\cos nx)'=n\sin^{n-1}x.\cos(n+1)x$;

b) $(\sin^n x.\sin nx)'=n\sin^{n-1}x.\sin(n+1)x$.

5.24. Chứng minh rằng hàm số sau đây có đạo hàm bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x.$$

5.25. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết

a) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x - 2x - 5$;

b) $f(x) = \dfrac{2\cos 17x}{17} - \dfrac{\sqrt{3}\sin 5x}{5} + \dfrac{\cos 5x}{5} + 2.$

5.26. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, biết rằng

$$f(x) = a\cos x + 2\sin x - 3x + 1.$$

5.27. Giải và biện luận phương trình $f'(x) = 0$ biết rằng

$$f(x) = \sin 2x + 2(1 - 2m)\cos x - 2mx.$$

§4. VI PHÂN

5.28. Cho hàm số

$$y = x^3 - x.$$

Tính Δy và dy tại $x_0 = 2$ với Δx lần lượt nhận các giá trị $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Tìm các giá trị tương ứng của sai số tuyệt đối $\Delta = |\Delta y - \mathrm{d}y|$ và sai số tương đối

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}\right|.$$

5.29. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

Tính $\mathrm{d}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-4}, biết $\Delta x = 0{,}01$.

5.30. Tính vi phân của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{0{,}5x^2}$;

b) $y = \dfrac{m+n}{\sqrt{x}}$ (m, n là các hằng số) ;

c) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$;

d) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

5.31. Áp dụng công thức tính gần đúng $\Delta y \approx dy$, hãy tính gần đúng các số sau đây (lấy 5 chữ số thập phân trong kết quả) :

a) $\sqrt{0,99998}$; b) $\sin(-0,00002)$.

§5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

5.32. Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau

a) $y = x\sin 2x$ (y'') ; b) $y = \cos^2 x$ (y''') ;

c) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$ $\left(y^{(n)}\right)$;

d) $y = \dfrac{1}{ax+b}$ (a, b là các hằng số, $a \neq 0$), $\left(y^{(n)}\right)$;

e) $y = \sin x$ $\left(y^{(n)}\right)$; g) $y = \cos x$ $\left(y^{(n)}\right)$.

5.33. Cho hai số A và B sao cho

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \ (\forall x \neq \pm 1).$$

a) Tìm A và B.

b) Tính $f^{(n)}(x)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

5.34. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây thoả mãn hệ thức tương ứng đã chỉ ra

a) $y = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^3$; $\left(1+x^2\right)y'' + xy' - 9y = 0$;

b) $y = \sin 2x$; $y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} y$.

5.35. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình

$$s = 200 + 14t - t^2$$

ở đó t được tính bằng giây (s) và s được tính bằng mét (m).

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0 ?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$s.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các phương án trả lời trong mỗi câu hỏi (bài tập) từ 5.36 đến 5.39, phương án nào đúng ?

5.36. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x>2 \\ x^2-3x & \text{khi } x\le 2. \end{cases}$$

(A) Vì 2 là hằng số nên $f'(2)=0$;

(B) Với $x\le 2$ thì $f'(x)=(x^2-3x)'=2x-3 \Rightarrow f'(2)=2.2-3=1$;

(C) Với $x>2$ thì $f'(x)=(x+1)'=1 \Rightarrow f'(2)=1$;

(D) Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=2$.

5.37. Cho hàm số

$$f(x)=x^3-2x^2+2x-3 \ (\mathscr{C}).$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại tiếp điểm M có hoành độ bằng 1 là

(A) $y=(3x^2-4x+2)(x-1)-2$;

(B) $y=0(x-1)-2$;

(C) $y=(x-1)-2$;

(D) $y=(x-1)-3$.

5.38. Cho hàm số

$$f(x)=\sqrt{2x}.$$

(A) Vì $f(0)=0$ nên $f'(0)=0$;

(B) Vì hàm số $f(x)$ không xác định khi $x<0$, nên không tồn tại $f'(0)$;

(C) Vì $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ nên $f'(0)=+\infty$;

(D) Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2x}}{x}=+\infty$ nên $f'(0)=+\infty$.

5.39. Cho hàm số

$$y = \sin^3(1-x).$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

(A) $f'(x) = \cos^3(1-x)$;

(B) $f'(x) = -\cos^3(1-x)$;

(C) $f'(x) = -3\sin^2(1-x)\cos(1-x)$;

(D) $f'(x) = 3\sin^2(1-x)\cos(1-x)$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TỰ LUẬN

5.40. Cho biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = A$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng $A = f'(0)$.

5.41. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ khi } x \le 0 \\ -x^3 + bx + c \text{ khi } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm điều kiện của b và c để $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

b) Xác định b và c để $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$ và tính $f'(0)$.

5.42. Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số) :

a) $f'(x) = 0$ biết $f(x) = \dfrac{mx^4}{4} - (m+2)\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - 3x + 1$;

b) $f(x).f'(x) = m$ biết $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

5.43. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{|\cos x|}\left(x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right).$$

Chứng minh rằng

$$f'(x) = \frac{\tan x}{|\cos x|}.$$

5.44. Tìm a để tồn tại hàm số :

$$f(x)=4x^3-6x^2\cos 2a+3x\sin 2a\sin 6a+\sqrt{2a-1-a^2}\ \text{(}a\text{ là hằng số).}$$

Với giá trị của số a đó, hãy xét dấu của $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.45. Tìm m để đồ thị hàm số

$$y=4x^3-3x$$

tiếp xúc với đường thẳng $y=mx-1$.

5.46. Cho các hàm số

$$y=f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2}}\ \text{ và }\ y=g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}.$$

Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hai hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tìm góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.

5.47. Một đoàn tàu hoả rời ga, chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $0{,}1\text{m/s}^2$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tính vận tốc tức thời tại thời điểm tàu đã đi được đúng 500m.

5.48. a) Chứng minh rằng nếu $P(x)$ là một đa thức bậc ba và α là một số thực bất kì thì ta có

$$P(x+\alpha)=P(\alpha)+xP'(\alpha)+\frac{x^2}{2}P''(\alpha)+\frac{x^3}{6}P'''(\alpha)\quad(\forall x\in\mathbb{R}).$$

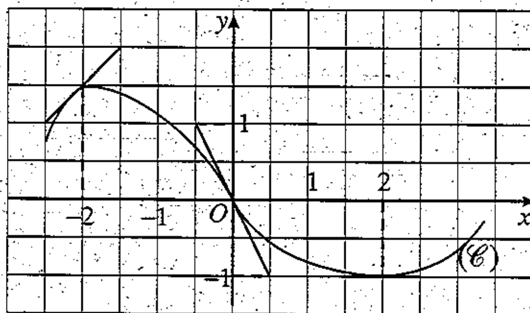
b) Xác định đa thức $P(x)$ bậc ba biết

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=P'''(0)=1.$$

5.49. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Căn cứ vào đồ thị $(\mathscr{C})$ được vẽ trên hình 5.1 ;

a) Hãy xác định $f'(-2)$, $f'(0)$ và $f'(2)$.

b) Hãy cho biết dấu của $f'(x)$ với mọi $x\in(0\,;2)$.



Hình 5.1

5.50. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại điểm bất kì của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2} \quad (\mathscr{C})$$

cắt trục tung tại một điểm cách đều tiếp điểm và gốc toạ độ.

5.51. Gọi $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{P}')$ lần lượt là đồ thị của hai hàm số

$$y = f(x) = -x^2 - 2x + 1 \ (\mathscr{P}) \text{ và } y = g(x) = x^2 - 2x + 3 \ (\mathscr{P}')$$

a) Vẽ các đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Viết phương trình của đường thẳng (d) là tiếp tuyến của $(\mathscr{P})$ tại tiếp điểm A đồng thời cũng là tiếp tuyến của $(\mathscr{P}')$ tại tiếp điểm B (đường thẳng (d) nếu có, được gọi là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{P}')$).

5.52. Cho hàm số

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Tìm

a) $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 2} f'(x)$; c) $\lim\limits_{n \to \infty} f'\left(\frac{1}{2}\right)$; d) $\lim\limits_{n \to \infty} f'(3)$

C – HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

5.1. Với mỗi $a \neq 0$, ta tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm đó theo định nghĩa.

• Tính Δy

$$\Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

• Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=y'(x).$$

5.2. a) -4 ; b) 2 và 4.

5.3. a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ và $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{9}\right)$;

b) Muốn có tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3$ mà hệ số góc của tiếp tuyến đó âm thì phải tồn tại điểm x_0 sao cho $f'(x_0)<0$. Ở đây $f'(x)=3x^2\geq 0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$; vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đã cho mà hệ số góc của nó âm.

5.4. Ta có

$$y'=2kx\ (\forall x\in\mathbb{R}).$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(a\,;ka^2)$ của parabol $(\mathcal{P})$ là

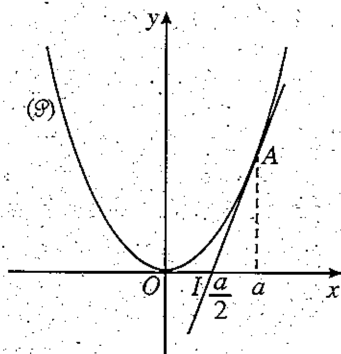
$$y=2ka(x-a)+ka^2=2kax-ka^2.$$

Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến này với trục Ox. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình

$2kax-ka^2=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$ (vì $ak\neq 0$).

Suy ra $I\left(\frac{a}{2};0\right)$.

Từ đó để vẽ tiếp tuyến tại điểm $A(a\,;ka^2)$ của parabol $(\mathcal{P})$, ta nối điểm A với điểm $I\left(\frac{a}{2};0\right)$; đường thẳng AI là tiếp tuyến phải tìm.



Hình 5.2

5.5. Theo công thức tính đạo hàm của hàm số tại điểm 0 :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

ta được

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|^3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|^3}}{x}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{|x|^3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{|x|^3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\sqrt{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{-x}\right)=0$

nên $f'(0)=0$.

5.6. a) • Với $x<2$ thì $f(x)=x^2-x+2$ là hàm số liên tục và đạo hàm của nó là $f'(x)=2x-1$.

• Với $x>2$ thì $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ là hàm số liên tục và đạo hàm của nó là

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}.$$

• Với $x=2$ thì ta có

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x+2)=4$$

và

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-1}=1.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, tức là hàm số không liên tục tại điểm $x=2$, nên nó cũng không có đạo hàm tại điểm này. (Ta đã biết : Hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó, suy ra : Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó).

b) Tương tự như bài a), dễ dàng chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục và có đạo hàm tại mọi điểm $x\neq 1$ và

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<1\\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{khi } x>1.\end{cases}$$

Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm tại điểm $x=1$. Vì

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=2=f(1)$$

nên hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$.

Mặt khác ta có

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2+x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+2)=3$$

và
$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{2}{x}\right)=-2.$$

Do đó

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

Suy ra hàm số đã cho không có đạo hàm tại điểm $x=1$.

c) Chứng minh tương tự như trên, ta thấy hàm số đã cho liên tục và có đạo hàm tại mọi điểm $x\neq0$ và

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ -3x^2 & \text{khi } x>0\end{cases}$$

Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm tại điểm $x=0$.

Ta có

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=1=f(1).$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

Mặt khác ta có :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2+1)-1}{x}=\lim_{x\to0^-}x=0$$

và

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(-x^3+1)-1}{x}=\lim_{x\to0^+}(-x^2)=0.$$

Vì $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ nên suy ra

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

hay $f'(0) = 0$.

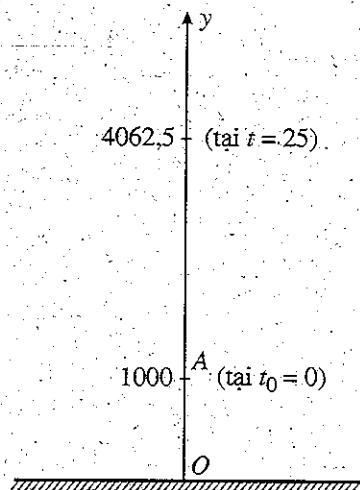
Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$, hàm số đã cho có đạo hàm và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \text{ khi } x \le 0 \\ -3x^2 \text{ khi } x > 0. \end{cases}$$

Chú ý. Có thể không cần chứng minh hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$ (theo định nghĩa) như đã làm, mà lí luận như sau (khi đã chứng minh được $f'(0) = 0$): "Vì hàm số đã cho có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nên nó liên tục tại điểm đó.

5.7. a) Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng từ mặt đất lên trời, gốc O ở mặt đất và A là vị trí viên đạn được bắn lên, gốc thời gian (tức lúc $t = 0$) được tính từ vị trí A (h. 5.3) ; khi đó chuyển động của viên đạn là chuyển động biến đổi đều với vận tốc ban đầu $v_0 = 245\text{m/s}$ và với gia tốc $g = -9{,}8\text{m/s}^2$. (Gia tốc nhận giá trị âm vì vectơ gia tốc ngược chiều dương của trục Oy). Phương trình chuyển động của viên đạn là

$$y = 1000 + 245t - 4{,}9t^2.$$



Hình 5.3

Ta có $v(t) = y' = 245 - 9{,}8t$.

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất và sẽ bắt đầu rơi khi

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 245 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 25(\text{s})$$

Khi đó viên đạn cách mặt đất là

$$y(25) = 1000 + 245.25 - 4{,}9.25^2 = 4062{,}5(\text{m}).$$

b) Viên đạn rơi đến đất khi $y = 0$. Vậy nếu gọi t_1 là thời gian kể từ khi viên đạn được bắn lên trời đến khi nó rơi tới đất thì t_1 phải là nghiệm dương của phương trình

$$0 = 1000 + 245t - 4{,}9t^2 \Leftrightarrow t_1 \approx 54\,(\text{s}).$$

5.8. a) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$; b) $3,5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

c) $2x\left(3x^4-28x^2+49\right)$; d) $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$; e) $\frac{3-2t}{(t^2-3t+1)^2}$.

5.9. $f(4)=8$; $f'(4)=2,5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $f'(a^2)=3-\frac{1}{|a|}$.

5.10. a) $-20(1-x)^{19}$; b) $15\left(t^2+\frac{1}{t^4}+1\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3t\right)^4$;

c) $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$; d) $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

5.11. a) Đặt $u=x^2$, ta có hàm số hợp $y=f(u)$, $u=u(x)=x^2$.

Vậy

$$y'=f'(u).u'(x)=f'(x^2).2x.$$

b) $y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left[2f(x).f'(x)+2g(x).g'(x)\right]$.

5.12. • Giả sử $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$, khi đó ta có

$$f(x)=f(-x)\quad(\forall x\in\mathbb{R}).$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$f'(x)=f'(-x).(-x)'\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x).$$

Do đó $f'(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

• Chứng minh tương tự cho trường hợp $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

5.13. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

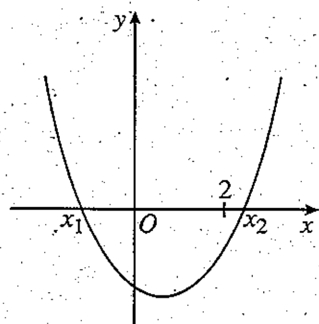
$$f'(x)=3x^2-4x+m.$$

a) Để $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì ta phải tìm m sao cho $f'(x)$ phải là tam thức bậc hai ax^2+bx+c với hệ số $a>0$ và có nghiệm kép, tức là

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}.$$

b) Để $f'(x) \geq 0$ với mọi x thì ta phải tìm m sao cho

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}.$$



Hình 5.4

c) (h.5.4) Để $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0\ ;\ 2)$ thì ta phải tìm m sao cho số 0 và số 2 thuộc đoạn $[x_1\ ; x_2]$ (x_1 và x_2 là hai nghiệm của $f'(x)$) tức là

$$\begin{cases} af'(0) \leq 0 \\ af'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.m \leq 0 \\ 3(4 + m) \leq 0 \end{cases}$$

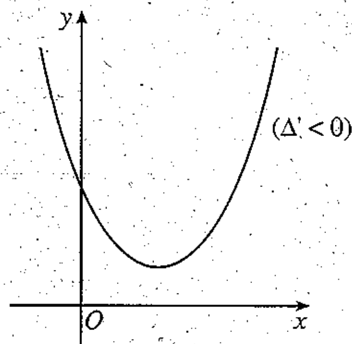
$$\Leftrightarrow m \leq -4.$$

d) Để $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$ thì ta phải xét hai trường hợp sau đây

• Trường hợp thứ nhất (h. 5.5a)

Ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ vô nghiệm và có $a > 0$, tức là

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{4}{3}.$$

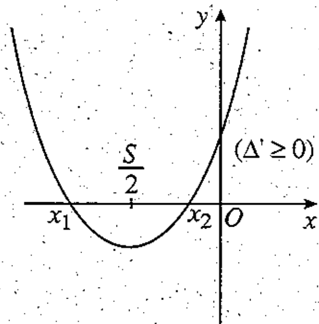


Hình 5.5a

• Trường hợp thứ hai (h. 5.5b)

Ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ có $a > 0$ đồng thời có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn các điều kiện $x_1 \leq x_2 \leq 0$, tức là

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' = 4 - 3m \geq 0 \\ af'(0) = 3m \geq 0 \\ \frac{S}{2} - 0 = \frac{2}{3} \leq 0 \text{ (loại).} \end{cases}$$



Hình 5.5b

Hệ này vô nghiệm.

Chú ý. Về nguyên tắc phải xét hai trường hợp, dù trong bài này trường hợp thứ hai vô nghiệm.

5.14. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = mx^2 - mx + 3 - m.$$

a) Ta phải xét hai trường hợp sau đây :

1. Với $m = 0$ thì $f'(x) = 3 > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Vậy $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

2. Với $m \neq 0$ (khi đó $f'(x)$ là một tam thức bậc hai) thì ta phải tìm m sao cho

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3-m) = m(5m-12) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}.$$

Vậy các giá trị của m thoả mãn điều kiện bài toán là $0 \leq m < \frac{12}{5}$.

Chú ý. Không được ghép hai trường hợp 1 và 2 (vì trong trường hợp 1, $f(x)$ không phải là một tam thức bậc hai nên không áp dụng được định lí về dấu của tam thức bậc hai).

b) Để $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu thì ta phải tìm m sao cho tam thức bậc hai $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt và tích của chúng là $P = \frac{c}{a} > 0$ (hay số 0 nằm ngoài hai nghiệm) tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m(5m-12) > 0 \\ \dfrac{3-m}{m} > 0 \text{ (hay } m(3-m) > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{12}{5} < m < 3.$$

c) Vì $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) nên ta có

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{m}{m} = 1 \\ x_1 . x_2 = \dfrac{3-m}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m \geq \dfrac{12}{5} \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ thức phải tìm là $x_1 + x_2 = 1$.

5.15. a) $x_1 \approx -0,7208$; $x_2 \approx 1,3874$ hoặc viết $x_1 = -0,7208 \pm 0,0001$;

$x_2 = 1,3874 \pm 0,0001$.

b) $x_0 = 0$; $x_1 \approx -1,4430$; $x_2 \approx 0,6930$.

5.16. ĐKXĐ của hàm số $f'(x)$ là $x < -2$ hoặc $x > 4$. Vậy ta phải giải bất phương trình

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}} \leq 1 \text{ (với } x < -2 \text{ hoặc } x > 4).$$

• Với $x < -2$ thì $x - 1 < 0$, do đó

$$f'(x) \leq 1$$

luôn luôn đúng. Vậy $x < -2$ thoả mãn điều kiện bài toán.

• Với $x > 4$ thì $x - 1 > 0$, do đó

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 2x - 8}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \leq x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow 1 \leq -8 \text{ (loại)}$$

Vậy đáp số của bài toán là $x < -2$.

5.17. a) $y = -3x - 7$; $\quad y = -3x + \frac{67}{27}$.

b) $y = -7x + 5$; $\quad y = -7x + \frac{103}{27}$.

c) $y = 2$; $\quad y = -\frac{25}{4}x + 2$.

5.18. Trước hết ta hãy viết phương trình tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại tiếp điểm $A(-1\,;\,0)$. Ta có

$$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1 \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Với $x_0 = -1$, $f(x_0) = 0$ thì $f'(x_0) = 1$, do đó phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = x + 1. \text{ (T)}$$

Để tiếp tuyến (T) cũng là một tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại một điểm $B(x_1\,;\,f(x_1))$ khác điểm $A(-1\,;\,0)$ thì điều kiện cần và đủ là (T) phải cắt đồ thị ($\mathscr{C}$) tại B

(tức là ta phải có $f(x) = x+1$) đồng thời hệ số góc của tiếp tuyến tại B phải bằng hệ số góc của tiếp tuyến (T) (tức là ta phải có $f'(x) = 1$). Tóm lại ta phải giải hệ thống phương trình

$$\begin{cases} f(x) = x+1 \\ f'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^4 + 2x^2 + x = x+1 \\ -4x^3 + 4x + 1 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Nghiệm của hệ thống này chính là hoành độ các tiếp điểm của (T) với đồ thị ($\mathscr{C}$).

Giải hệ (*), ta được $x = \pm 1$.

Với $x_0 = -1$, ta được tiếp điểm $A(-1\,;\,0)$.

Với $x_0 = 1$, ta được tiếp điểm $B(1\,;\,2)$.

Vậy đường thẳng $y = x+1$ vừa là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại tiếp điểm $A(-1\,;\,0)$, vừa là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) tại tiếp điểm $B(1\,;\,2) \neq A(-1,\,0)$.

5.19. a) $\dfrac{3}{5}$; b) $-\dfrac{2}{9}$; c) $\dfrac{1}{2}$;

d) • *Cách 1*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} . \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

(vì $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$ và $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos 0 = 1$).

• *Cách 2*. Đặt $\dfrac{\pi}{2} - x = t$ thì khi $x \to \dfrac{\pi}{2}$ ta sẽ có $t \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim\limits_{t \to 0} t \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \lim\limits_{t \to 0} t . \cot t = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin t} . \cos t = 1.$

5.20. a) $\dfrac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$; b) $\dfrac{t-\sin t\cos t}{t^2\cos^2 t}$;

c) $\dfrac{(1+\tan t)(\sin t+t\cos t)-\dfrac{1}{\cos^2 t}(t\sin t)}{(1+\tan t)^2}$; d) $-\sin^3 x$;

e) $\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x+1}.\sin^2\sqrt{x^2-x+1}}$; g) $2\cos x\cos(2\sin x)$;

h) $-6\cos 4x.\sin 8x$; i) $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

5.21. Để hàm số có đạo hàm thì ta phải có $\cos 2x>0$. Với điều kiện đó thì

$$f'(x)=\dfrac{-\sin x\sqrt{\cos 2x}-\cos x.\dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-2\sin 2x)}{\cos 2x}$$

$$=\dfrac{-\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$$

- Khi $x=\dfrac{\pi}{3}$ thì $\cos 2x=\cos\dfrac{2\pi}{3}<0$, nên không tồn tại $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
- Khi $x=\dfrac{\pi}{6}$ thì $\cos 2x=\cos\dfrac{\pi}{3}>0$, nên tồn tại $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ và

$$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sqrt{\cos^3\dfrac{\pi}{3}}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}}=\sqrt{2}.$$

5.22. *Cách 1.* Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$$
$$=2\sin 2x(-\cos 2x)=-\sin 4x.$$

Mặt khác ta có

$$g'(x)=\frac{1}{4}(-4\sin 4x)=-\sin 4x.$$

Vậy với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=g'(x).$$

Cách 2. Ta chứng minh rằng $f(x)$ và $g(x)$ khác nhau một hằng số ; vì hai hàm số khác nhau một hằng số thì rõ ràng đạo hàm của chúng bằng nhau (nếu chúng có đạo hàm). Thật vậy, ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

tức là

$$f(x) = \frac{3}{4} + g(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Vậy $\qquad f'(x) = g'(x).$

5.23. Học sinh tự chứng minh.

5.24. *Cách 1.* Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số hợp

$$(\cos^2 u)' = 2\cos u(-\sin u).u' = -u'.\sin 2u,$$

ta được

$$y' = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x)\right)\right] + \left[\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - 2\sin 2x$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin(-2x) + 2\cos\frac{4\pi}{3}\sin(-2x) - 2\sin 2x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Vì $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ nên

$$y' = \sin 2x + \sin 2x - 2\sin 2x = 0.$$

Cách 2: Áp dụng công thức hạ bậc

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2},$$

ta chứng minh được $y = 1$. Vậy $y' = 0$.

5.25. a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin x.\sin\frac{\pi}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -2\sin 17x - \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 17x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 17x + \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-17x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{3} = -17x + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{3} = \pi + 17x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{66} + \frac{k\pi}{11} \\ x = -\frac{\pi}{18} - \frac{k\pi}{6}. \end{array}\right.$$

5.26. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = -a\sin x + 2\cos x - 3.$$

Để $f'(x) = 0$ có nghiệm thì ta phải tìm a sao cho phương trình

$$2\cos x - a\sin x = 3 \qquad (1)$$

có nghiệm. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}\cos x - \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}\sin x = \frac{3}{\sqrt{a^2+4}}. \qquad (2)$$

Vì $\left(\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}\right)^2 = 1$ nên có số α sao cho $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} \\ \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}. \end{cases}$

Thế vào (2), ta được : $\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{a^2+4}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = \frac{3}{\sqrt{a^2+4}}. \qquad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \le \frac{3}{\sqrt{a^2+4}} \le 1 \Leftrightarrow 3 \le \sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow a^2+4 \ge 9 \Leftrightarrow a^2 \ge 5 \Leftrightarrow |a| \ge \sqrt{5}.$$

5.27. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2(1-2m)\sin x - 2m.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) - (1-2m)\sin x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (1-2m)\sin x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\Delta = (1-2m)^2 - 8m + 8 = 4m^2 - 12m + 9 = (2m-3)^2.$$

Vậy

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{(2m-1)-(2m-3)}{4} = \dfrac{1}{2} \quad (2) \\ \sin x = \dfrac{(2m-1)+(2m-3)}{4} = m-1. \quad (3) \end{array}\right.$$

• Giải (2), ta được

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right. \quad (4)$$

• Giải (3), với điều kiện $-1 \le m - 1 \le 1$ hay $0 \le m \le 2$, ta được

$$\sin x = m - 1 = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{array}\right. \quad (5)$$

Kết luận

a) Nếu $m < 0$ hoặc $m > 2$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm là (4).

b) Nếu $0 \le m \le 2$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm là (4) và (5).

5.28. Ta lập bảng sau đây

Δx	1	0,1	0,01
Δy	18	1,161	0,110601
dy	11	1,1	0,11
$\Delta = \lvert \Delta y - dy \rvert$	7	0,061	0,000601
$\delta = \left\lvert \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right\rvert$	0,39	0,0526	0,0055

Chú ý. Qua bảng trên ta thấy, với Δx càng nhỏ thì sai số tuyệt đối của công thức gần đúng $\Delta y \approx dy$ là $\Delta = |\Delta y - dy|$ càng nhỏ và sai số tương đối

$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$ cũng càng nhỏ.

5.29. $-0,0693$.

5.30. a) $-\frac{4dx}{x^3}$; b) $-\frac{m+n}{2x\sqrt{x}}dx$;

c) $-\frac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$; d) $\frac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2}dx$.

5.31. a) 0,99999.

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = \sqrt{x}$ với $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,00002$.

b) $-0,00002$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = \sin x$ với $x_0 = 0$ và $\Delta x = -0,00002$.

5.32. a) $4(\cos 2x - x\sin 2x)$; b) $4\sin 2x$;

c) $y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x$; $y'' = 12x^2 - 18x + 2$;

$y''' = 24x - 18$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$ $(n \geq 5)$.

d) $\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

e) Ta có

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

g) Chứng minh tương tự câu e), ta được :

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5.33. Ta có

$$\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow (A+B)x + B - A \equiv x - 5 \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2. \end{cases}$$

Vậy

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}.$$

Áp dụng công thức (xem bài tập 5.32 d)

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

ta được

$$f^{(n)}(x) = 3\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - 2\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

5.34. a) Học sinh tự chứng minh.

b) Ta có

$y' = 2\cos 2x$; $\quad y'' = -2^2 \sin 2x$;

$y''' = -2^3 \cos 2x$; $\quad y^{(4)} = 2^4 \sin 2x$;

$y^{(5)} = 2^5 \cos 2x$; $\quad y^{(6)} = -2^6 \sin 2x$;

$y^{(7)} = -2^7 \cos 2x$; $\quad y^{(8)} = 2^8 \sin 2x$.

. . .

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} \sin 2x = (-1)^n 2^{2n} y.$$

5.35. a) $t = 7\text{s}$; b) $v(3) = 8\text{m/s}$; $a(3) = -2\text{m/s}^2$.

5.36. (D).

5.37. (C).

5.38. (B).

5.39. (C).

5.40. Theo định nghĩa, ta có

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Vì $f(0) = 0$ nên

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = A.$$

5.41. a) Hàm số liên tục tại điểm $x = 0$ nếu $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ hay

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ta có

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^3 + bx + c) = c,$$

$$f(0) = 0^2 = 0.$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x = 0$ nếu $c = 0$ còn b tuỳ ý.

b) Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0$ thì nó liên tục tại điểm đó (suy ra $c = 0$) và có giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}. \qquad (1)$$

Ta có

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3 + bx}{x},$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x^2) + \lim_{x \to 0^+} b = b.$$

Để tồn tại giới hạn hữu hạn (1) thì ta phải có

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Suy ra $b=0$.

Vậy hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi $b=c=0$. Khi đó, ta có $f'(0)=0$.

5.42. a) Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f'(x)=mx^3-(m+2)x^2+5x-3.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow mx^3-(m+2)x^2+5x-3=0. \qquad (1)$$

Thử thấy $x=1$ là một nghiệm, nên ta có thể viết (1) dưới dạng

$$(x-1)(mx^2-2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \quad (2a)\\ mx^2-2x+3=0. & \quad (2b)\end{array}\right.$$

Ta hãy giải phương trình (2b). Xét hai trường hợp

- Với $m=0$ thì (2b) $\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$;
- Với $m\neq 0$ thì

$$(2b) \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-3m}}{m}\ \left(\text{với điều kiện } 0\neq m\le\frac{1}{3}\right).$$

Kết luận

+ Với $m>\dfrac{1}{3}$, phương trình có nghiệm $x_0=1$.

+ Với $m=0$, phương trình có nghiệm $x_0=1$ và $x_1=\dfrac{3}{2}$.

+ Với $0\neq m\le\dfrac{1}{3}$, phương trình có các nghiệm là

$$x_0=1,\ x_1=\frac{1-\sqrt{1-3m}}{m} \text{ và } x_2=\frac{1+\sqrt{1-3m}}{m}.$$

b) Để hàm số đã cho có đạo hàm thì ta phải có

$$x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ hoặc } x>4.$$

Với điều kiện $x<-2$ hoặc $x>4$, ta có

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}}.$$

Phương trình

$$f(x).f'(x)=m \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \text{ hoặc } x>4 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}}.\sqrt{x^2-2x-8}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \text{ hoặc } x>4 \\ x-1=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+m \\ 1+m<-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+m \\ 1+m>4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+m \\ m<-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+m \\ m>3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+m \\ |m|>3. \end{cases}$$

Kết luận

+ Với $|m|\leq 3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Với $|m|>3$ thì phương trình đã cho có nghiệm là $x=1+m$.

5.43. Vì $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ nên $\cos x\neq 0$. Xét hai trường hợp

+ Nếu $\cos x>0$ thì

$$f(x)=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$$

suy ra

$$f'(x)=-\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.\tan x=\frac{\tan x}{|\cos x|}. \qquad (1)$$

+ Nếu $\cos x<0$ thì

$$f(x)=\frac{1}{|\cos x|}=-\frac{1}{\cos x}$$

Suy ra

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{1}{\cos x}.\tan x=\frac{\tan x}{|\cos x|}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f'(x)=\dfrac{\tan x}{|\cos x|}\ \left(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$.

5.44. Ta nhận thấy

$$2a-1-a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=1.$$

Vậy :

- Khi $a \neq 1$ thì không tồn tại hàm số $f(x)$ với bất kì $x \in \mathbb{R}$, do đó không tồn tại $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Khi $a=1$ thì tồn tại hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$f(x)=4x^3-6x^2\cos 2+3x\sin 2\sin 6.$$

Ta có $f'(x)=12x^2-12x\cos 2+3\sin 2\sin 6$;

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3-6\cos 2+3\sin 2\sin 6=3(1-2\cos 2+\sin 2\sin 6).$$

Vì $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ nên $\cos 2<0$, suy ra $1-2\cos 2>1$. (1)

Mặt khác $|\sin 2\sin 6| \leq 1$, suy ra $\sin 2\sin 6 \geq -1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$1-2\cos 2+\sin 2\sin 6>0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)>0.$$

5.45. Để đồ thị hàm số

$$y=4x^3-3x$$

tiếp xúc với đường thẳng $y=mx-1$ thì ta phải tìm m sao cho hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} 4x^3-3x=mx-1 & (1) \\ 12x^2-3=m & (2) \end{cases}$$

có nghiệm. Thế m từ (2) vào (1), ta được

$$4x^3-3x=(12x^2-3)x-1 \Leftrightarrow 8x^3=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (2) ta được $m=0$. Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y=mx-1$.

5.46. Hoành độ giao điểm hai đồ thị của hai hàm số đã cho là

$$\frac{1}{x\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Tung độ giao điểm tương ứng là $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có :

- $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}.x^2}$, suy ra $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại giao điểm là $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$.

- $g'(x) = x\sqrt{2}$, suy ra $g'(1) = \sqrt{2}$;

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = g(x) tại giao điểm là $y = \sqrt{2}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $f'(1).g'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -1$

nên hai tiếp tuyến của hai đồ thị hàm số đã cho vuông góc với nhau, suy ra góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 90°.

5.47. Nếu chọn trục Os trùng với phương của chuyển động và chiều dương là chiều của chuyển động, gốc O là vị trí ban đầu trước khi tàu khởi hành và xem $t = 0$ là thời điểm tàu bắt đầu khởi hành, thế thì phương trình chuyển động của đoàn tàu là

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}.(0,1)t^2.$$

(s là quãng đường đi được, a là gia tốc).

Gọi t_0 ($t_0 > 0$) là khoảng thời gian từ lúc đoàn tàu rời ga đến khi đi được 500m, ta có

$$500 = \frac{1}{2}.(0,1)t_0^2 \Leftrightarrow t_0 = 100 \text{ (s)}.$$

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm tàu đã đi được đúng 500m là

$$v(t_0) = v(100) = 0,1 \times 100 = 10 \text{ (m/s)}.$$

5.48. Ta viết đa thức bậc ba $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \qquad (a_0 \neq 0).$$

Ta có

$$P'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2 \;;$$
$$P''(x) = 6a_0x + 2a_1 \;;$$
$$P'''(x) = 6a_0.$$

Vậy

$$\frac{x^3}{6}P'''(\alpha) + \frac{x^2}{2}P''(\alpha) + xP'(\alpha) + P(\alpha)$$

$$= a_0x^3 + (3a_0\alpha + a_1)x^2 + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3. \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$P(x+\alpha) = a_0(x+\alpha)^3 + a_1(x+\alpha)^2 + a_2(x+\alpha) + a_3$$

$$= a_0(x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3) + a_1(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) + a_2(x+\alpha) + a_3$$

$$= a_0x^3 + (3a_0\alpha + a_1)x^2 + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

b) Khi $\alpha = 0$, ta được

$$P(x) = P(0) + xP'(0) + \frac{x^2}{2}P''(0) + \frac{x^3}{6}P'''(0).$$

Vì

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 1$$

nên đa thức phải tìm là

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

5.49. a) $f'(-2) = 1$; $f'(0) = -2$; $f'(2) = 0$.

b) Với mọi $x \in (0\,;2)$, ta nhận thấy tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại các điểm $M(x\,;f(x))$ đi từ góc phần tư thứ hai đến góc phần tư thứ tư, do đó hệ số góc của tiếp tuyến là số âm, suy ra $f'(x) < 0$.

5.50. Để hàm số có đạo hàm thì ta phải có

$$x - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}.$$

Với điều kiện $0 < x < \frac{1}{4}$, ta có

$$y' = \frac{1-8x}{4\sqrt{x-4x^2}}.$$

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm tuỳ ý thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$; ta có $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}$,

$y'(x_0) = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0 - 4x_0^2}}$. Vậy phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ là

$$y = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}(x - x_0) + \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}.$$

Tiếp tuyến này cắt trục tung tại điểm T có tung độ là

$$y_T = \frac{1-8x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}(0 - x_0) + \frac{1}{2}\sqrt{x_0 - 4x_0^2}$$

$$= \frac{(1-8x_0)(-x_0) + 2(x_0 - 4x_0^2)}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}} = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}} > 0.$$

Khoảng cách TM_0 được tính bởi công thức

$$|TM_0|^2 = (x_0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x_0-4x_0^2} - \frac{x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}\right)^2$$

$$= x_0^2 + \left(\frac{2(x_0-4x_0^2) - x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}}\right)^2 = x_0^2 + \frac{(x_0 - 8x_0^2)^2}{16(x_0-4x_0^2)}$$

$$= \frac{16x_0^3 - 64x_0^4 + x_0^2 - 16x_0^3 + 64x_0^4}{16(x_0-4x_0^2)} = \frac{x_0^2}{16(x_0-4x_0^2)}.$$

Vậy

$$|TM_0| = \frac{x_0}{4\sqrt{x_0-4x_0^2}} = |TO| = y_T.$$

Điều này chứng tỏ, điểm T cách đều tiếp điểm M_0 và gốc toạ độ O.

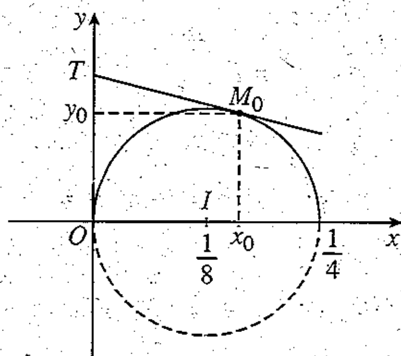
Chú ý. Có thể chứng minh bài toán này bằng phương pháp hình học như sau :

Với $0 \le x \le \frac{1}{4}$ thì $y \ge 0$ và ta có

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2} \Leftrightarrow 4y^2 + 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{4} + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

Vậy đồ thị ($\mathscr{C}$) là phần đường tròn thuộc góc phần tư thứ nhất (vì $x \geq 0$ và $y \geq 0$) tâm $I\left(\frac{1}{8} ; 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{8}$ (h.5.6).

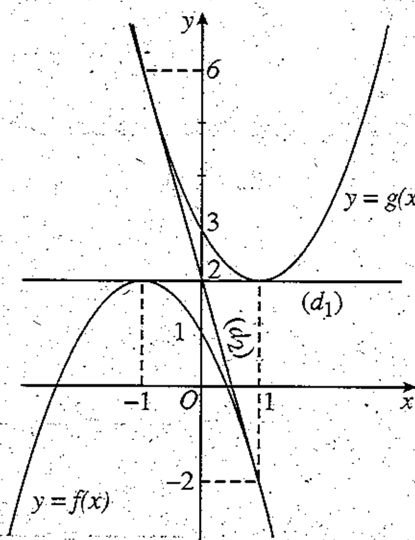


Hình 5.6

Áp dụng tính chất : từ một điểm T ngoài đường tròn, kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn là TM_0 và TO và ta có $|TM_0| = |TO|$. Đó là điều phải chứng minh.

5.51. a) Học sinh tự vẽ (h.5.7)

b) Gọi đường thẳng $y = mx + p$ (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 - 2x + 1$ tại điểm $A(a ; f(a))$, đồng thời là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $B(b ; g(b))$. Nếu thế thì ta phải có



Hình 5.7

$$(\text{I}) \begin{cases} f'(a) = g'(b) = m & (1) \\ f(a) = ma + p & (2) \\ g(b) = mb + p & (3) \end{cases}$$

((1) chứng tỏ hệ số góc của tiếp tuyến tại A (đối với ($\mathscr{P}$) và hệ số góc của tiếp tuyến tại B (đối với ($\mathscr{P}$')) bằng nhau và bằng m ; (2) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua A ; (3) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua B).

Khử m và p ở hệ phương trình (I), ta được

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - af'(a) = g(b) - bg'(b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a+1) = 2(b-1) \\ -a^2 - 2a + 1 + 2a(a+1) = b^2 - 2b + 3 - 2b(b-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \,;\, b = 1 \\ a = 1 \,;\, b = -1. \end{array} \right.$$

Thế vào (I) ta được

- Với $a = -1$; $b = 1$ thì $m = 0$ và $p = 2$, suy ra tiếp tuyến chung phải tìm là $y = 2$ (d_1).
- Với $a = 1$, $b = -1$ thì $m = -4$ và $p = 2$, suy ra tiếp tuyến chung phải tìm là $y = -4x + 2$ (d_2).

5.52. Ta có

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Áp dụng công thức tổng của cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = x \neq 1$ ta được :

$$f'(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Từ đó suy ra

a) $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1}(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = n + 1.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$ (vì $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$).

d) $\lim\limits_{n \to \infty} f'(3) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1) = +\infty$

(vì $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{n+1} = +\infty$).

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

ĐỀ BÀI

1. Giải phương trình

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$$

2. Biết $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Chứng minh rằng hàm số

$$y = (\sqrt{5}-1)\sin x + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x$$

đồng biến trên $\left(\frac{-9\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right)$.

3. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1 + \cos^2\frac{\pi}{5}.$$

4. Giải các phương trình sau :

a) $\cos 2x - 9\cos x + 5 = 0$;

b) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$;

c) $2\tan^4 x - 3\tan^2 x + 1 = 0$;

d) $\tan x \tan 2x = \tan x + \tan 2x$;

e) $5\cos 2x - 12\sin 2x = 13$;

f) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

5. Cho hàm số $f(x) = 2\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$;

b) Giải phương trình $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) Tính giá trị gần đúng (chính xác đến hàng phần nghìn) của các nghiệm nằm trong khoảng $(0 ; 2\pi)$ của phương trình $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Giải các phương trình sau

a) $4\cos x\cos 2x\cos 3x = \cos 6x$;

b) $2\cos^2\frac{x}{2}(1 - \sin x) + \cos^2 x = 0$;

c) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 2\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) + 1$;

d) $3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan 2x\tan^2 3x$.

7. An có 12 cuốn sách tham khảo khác nhau, trong đó có 6 cuốn sách toán, 4 cuốn sách vật lí và 2 cuốn sách hoá học. An muốn xếp chúng vào 3 ngăn A, B, C trên giá sách sao cho mỗi ngăn chứa một loại sách. Hỏi An có bao nhiêu cách xếp ?

8. Trong khai triển của $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$, hãy tìm số hạng tự do (tức là số hạng không chứa x).

9. Hãy chọn phương án đúng trong các phương án nêu sau đây :
Một hộp chứa 12 thẻ, trong đó có 2 thẻ ghi số 1 ; 4 thẻ ghi số 5 và 6 thẻ ghi số 10. Chọn ngẫu nhiên 6 thẻ. Khi đó, xác suất để các số ghi trên 6 thẻ được chọn có tổng số không nhỏ hơn 50 là

(A) $\dfrac{37}{924}$; (B) $\dfrac{99}{924}$; (C) $\dfrac{127}{924}$; (D) $\dfrac{132}{924}$.

10. Trong kì thi cuối năm lớp 11, xác suất để Bình đạt điểm giỏi môn toán là 0,92 ; môn Văn là 0,88.
a) Tính xác suất để Bình đạt điểm giỏi cả hai môn văn và toán.
b) Tính xác suất để Bình đạt điểm giỏi ít nhất một môn.

11. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số nguyên $n \geq 2$ và mọi số thực x thoả mãn $|x| < 1$:
$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

12. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của bốn số đó bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

13. Ba số có tổng bằng $\dfrac{148}{9}$ và lập thành một cấp số nhân. Theo thứ tự đó, ba số ấy đồng thời là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

14. Dãy số (u_n) được cho bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 2u_n - 1$ với mọi $n \geq 1$.
a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), trong đó $v_n = u_n - 1$ là một cấp số nhân. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.
b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).
c) Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

15. Tìm các giới hạn sau :
a) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{2n-1}+\dfrac{2^n\cos n}{3^n}\right)$; b) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-n}+\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{2n+3}$;
c) $\lim(2^n - 2n + 3)$; d) $\lim\left(\sqrt{n^4+2n^2}-n^2\right)$.

16. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy.

a) Tính độ dài cạnh của tam giác đều thứ n.

b) Tính tổng các chu vi của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...

c) Tính tổng diện tích của các tam giác đều đó.

17. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{2x^4-8}{x^3-2\sqrt{2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-5x^2+2}{(2x-1)(2x+3)}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{(x-2)(x^2-x-2)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{4x-9}}{(x-3)(x^2-2x-3)}$.

18. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(3 ; 5)$, liên tục tại điểm $x = 4$ và thoả mãn

$$2 \le f(x) \le x^2 - 8x + 18 \text{ với mọi } x \in (3 ; 5).$$

Tìm giá trị của hàm số f tại điểm $x = 4$.

19. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+x^2}{x^2+x} & \text{với } x \ne 1 \text{ và } x \ne 0 \\ -3 & \text{với } x = -1 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

20. Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$;

b) $y = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)^2}{\sqrt{3x^2+1}}$;

c) $y = \cos^3 2x - \sin^2 3x$;

d) $y = \tan^3\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)^2$;

e) $y = \sqrt{\cot(x^2+1)}$;

f) $y = \sqrt{\dfrac{\cos x}{1-\sin x}}$.

21. Chứng minh rằng đối với hàm số $y = x\sin x$, ta có

$$xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0.$$

22. Một chuyển động thẳng có phương trình $s(t) = \dfrac{1}{12}t^4 + \dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2$.

Chứng minh rằng gia tốc của chuyển động đó dương tại mọi thời điểm.

23. Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2-x}$. Xác định toạ độ tiếp điểm và viết phương trình của tiếp tuyến của (G), biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành tại điểm $P(3\,;\,0)$.

24. Áp dụng công thức tính gần đúng $\Delta y \approx dy$, hãy tính gần đúng các giá trị sau

a) $\sqrt[3]{215}$;   b) $\cos 61^\circ$.

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI - ĐÁP SỐ

1. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,;\, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn. Phân tích vế trái thành nhân tử như sau :

$(\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2\cos 4x\,(\cos 3x + \cos x) = 4\cos x\cos 2x\cos 4x.$

2. Từ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ suy ra $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Do đó

$$y = (\sqrt{5}-1)\sin x + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{10}\right).$$

Khi x tăng từ $-\frac{9\pi}{10}$ đến $\frac{\pi}{10}$ thì $x - \frac{\pi}{10}$ tăng từ $-\pi$ đến 0 nên $y = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$ tăng từ -4 đến 4. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{10}\,;\,\frac{\pi}{10}\right)$.

3. $x = k\pi,\ x = -\frac{\pi}{5} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Hướng dẫn. Dùng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích đưa được phương trình đã cho về dạng $\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$.

4. a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Hướng dẫn. Sử dụng $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ để đưa về phương trình đối với $\cos x$.

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\,;\, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Hướng dẫn. Chú ý rằng $2\sin^3 x - \sin x = \sin x\,(2\sin^2 x - 1) = -\sin x\cos 2x.$

c) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (hay $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$) ; $x = \pm\alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) $x = k\pi$; $x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = -3$.

Hướng dẫn. Sử dụng công thức $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$. ĐKXĐ : $\tan x \neq \pm 1$ (tất nhiên, trước hết phải có $\cos x \neq 0$).

e) $x = -\alpha + k\pi$ với $\cos 2\alpha = \dfrac{5}{13}$ và $\sin 2\alpha = \dfrac{12}{13}$.

f) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

5. a) Giá trị lớn nhất là $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$; giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

b) $x = k2\pi$; $x = 2\alpha + k2\pi$ với $\sin\alpha = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2\sqrt{5+2\sqrt{2}}}$ và $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5+2\sqrt{2}}}$

c) Trong khoảng $(0 ; 2\pi)$, không có giá trị nào thuộc họ $x = k2\pi$. Đối với họ nghiệm thứ hai, ta có thể chọn $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \approx 1{,}3153$. Khi đó ta có

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ và } -2\alpha + k2\pi \in (0 ; 2\pi) \Leftrightarrow 0 < -2\alpha + k2\pi < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha < k2\pi < 2\alpha + 2\pi.$$

Chỉ có một giá trị nguyên duy nhất của k thoả mãn điều kiện này, đó là $k = 1$. Vậy $x = -2\alpha + 2\pi \approx 3{,}653$.

6. a) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi vế trái của phương trình như sau :

$$4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 2\cos^2 2x + 2\cos 2x\cos 4x$$

$$= 2\cos^2 2x + (\cos 2x + \cos 6x).$$

b) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Hướng dẫn. Biến đổi vế trái thành $(1 + \cos x)(1 - \sin x) + (1 - \sin^2 x)$.

c) $x = \pm\alpha + k2\pi$ với $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \cos x - \frac{1}{\cos x}$.

d) $x = k\pi$; $x = \pm\alpha + k2\pi$ với $\tan\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình như sau với điều kiện $\cos x\cos 2x\cos 3x \neq 0$.

$3\tan 2x - 4\tan 3x = \tan 2x\tan^2 3x$

$\Leftrightarrow 3(\tan 2x - \tan 3x) = \tan 3x\,(1 + \tan 2x\tan 3x)$

$\Leftrightarrow -3\tan x = \tan 3x \Leftrightarrow -3\tan x = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x\tan 2x}$.

Từ đó quy về phương trình đối với $\tan x$ là : $\tan x\,(5\tan^2 x - 3) = 0$.

7. Có 3! cách chọn 3 ngăn A, B, C để xếp ba loại sách. Trong ngăn sách toán có 6! cách xếp ; ngăn sách Vật lí có 4! cách xếp ; ngăn sách Hoá học có 2! cách xếp. Vậy có tất cả $3!6!4!2! = 207\,360$ cách xếp sách.

8. $C_{18}^{9} = 48620$.

Hướng dẫn. Với $0 \leq k < 18$, số hạng thứ $k + 1$ là $C_{18}^{k}(x^3)^{18-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{k} = C_{18}^{k}x^{54-6k}$.

Ta có số hạng tự do nếu và chỉ nếu $54 - 6k = 0$, tức là $k = 9$.

9. Chọn đáp án (C).

Hướng dẫn. Số trường hợp có thể là $C_{12}^{6} = 924$. Các trường hợp thuận lợi là :

– Cả 6 thẻ được rút đều ghi số 10, có 1 cách ;

– Có 5 thẻ được rút ghi số 10 (1 thẻ tuỳ ý trong số 6 thẻ còn lại), có $C_6^5C_6^1 = 36$ cách ;

– Có 4 thẻ được rút ghi số 10 và 2 thẻ ghi số 5, có $C_6^4C_4^2 = 90$ cách.

10. a) $P = 0{,}92 \times 0{,}88 = 0{,}8096$.

b) Xác suất của biến cố "Bình không đạt điểm giỏi cả hai môn" là

$$0{,}08 \times 0{,}12 = 0{,}0096.$$

Vậy xác suất cần tìm là $1 - 0{,}0096 = 0{,}9904$.

11. Khi $n = 2$, bất đẳng thức đúng vì

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2) < 2^2 \text{ (do } x^2 < 1).$$

Giả sử với $n \geq 2$, đã có :

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n, \ (|x| < 1). \quad (1)$$

Ta cần chứng minh

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < 2^{n+1}, \; (|x| < 1). \qquad (2)$$

Thật vậy, do $|x| < 1$ nên $0 < 1 - x < 2$ và $0 < 1 + x < 2$; từ đó ta có

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} = (1-x)^n(1-x) + (1+x)^n(1+x)$$
$$< 2\,[(1-x)^n + (1+x)^n] < 2.\,2^n = 2^{n+1}.$$

12. Bốn số cần tìm là 10, 7, 4, 1 (hoặc 1, 4, 7, 10).

Hướng dẫn. Do bốn số cần tìm lập thành một cấp số cộng nên ta có thể kí hiệu bốn số đó là $a - d$, a, $a + d$ và $a + 2d$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$(a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 4a + 2d = 22$$
$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 4a^2 + 4ad + 6d^2 = 166.$$

13. $(a, b, c) = \left(\frac{148}{27}, \frac{148}{27}, \frac{148}{27}\right)$; hoặc $(a, b, c) = \left(4, \frac{16}{3}, \frac{64}{9}\right)$.

Hướng dẫn. Nếu cấp số cộng có số hạng đầu là a, công sai là d thì ba số cần tìm theo thứ tự là a, $a + 3d$ và $a + 7d$. Từ giả thiết ta có :

$$a + (a+3d) + (a+7d) = 3a + 10d = \frac{148}{9}$$
$$a(a+7d) = (a+3d)^2.$$

14. a) Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \Rightarrow u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1) \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n.$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 - 1 = 1$ và công bội $q = 2$.

b) Từ câu a) suy ra số hạng tổng quát của (v_n) là $v_n = 2^{n-1}$. Do đó số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n = v_n + 1 = 2^{n-1} + 1$.

c) $S = 2^{100} + 99$.

Hướng dẫn. $S = u_1 + u_2 + ... + u_{100} = v_1 + v_2 + ... + v_{100} + 100$.

15. a) $\frac{1}{2}$. b) 2. c) $+\infty$.

Hướng dẫn. $2^n - 2n + 3 = 2^n\left(1 - \frac{2n}{2^n} + \frac{3}{2^n}\right)$.

d) 1.

16. a) Độ dài cạnh của tam giác đều $A_nB_nC_n$ là $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

b) $\frac{6a}{2-\sqrt{3}}$. c) $a^2\sqrt{3}$.

17. a) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$. b) $-\infty$. c) $+\infty$.

Hướng dẫn. $\dfrac{2x-1}{(x-2)(x^2-x-2)}=\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{2x-1}{x+1}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

18. Ta có $f(x)-2\geq 0$ với mọi $x\in(3\ ;\ 5)$. Vì f liên tục tại điểm $x=4$ nên $\lim\limits_{x\to 4}\left[f(x)-2\right]=f(4)-2\geq 2$ hay $f(4)\geq 2$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to 4}\left[x^2-8x+18-f(x)\right]=2-f(4)\geq 0$ hay $f(4)\leq 2$. Từ đó ta có : $f(4)=2$.

19. Hiển nhiên hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq -1$ và $x\neq 0$.

Với $x\neq -1$ và $x\neq 0$, ta có $f(x)=x(x^2-x+1)$, suy ra

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}x(x^2-x+1)=-3=f(-1)$, và

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x(x^2-x+1)=0=f(0)$.

Vậy hàm số $f(x)$ cũng liên tục tại $x=-1$ và tại $x=0$, suy ra nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

20. a) $y'=\dfrac{3x-4}{2x^2\sqrt{x^2-3x+2}}$.

b) $y'=\dfrac{(x^2-x+1)(9x^3-3x^2+x-2)}{\sqrt{(3x^2+1)^3}}$.

c) $y'=-6\cos^2 2x\sin 2x-3\sin 6x$.

d) $y'=3(8x-\pi)\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2\left[1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2\right]$.

e) $y'=\dfrac{-x[1+\cot^2(x^2+1)]}{\sqrt{\cot(x^2+1)}}$.

f) $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{\cos x(1-\sin x)}}$.

Hướng dẫn. Đặt $u = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, ta có $u' = \dfrac{1}{1-\sin x}$ và

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2(1-\sin x)\sqrt{\dfrac{\cos x}{1-\sin x}}}$$

21. *Hướng dẫn.* Ta có $y' = \sin x + x\cos x$; $y'' = 2\cos x - x\sin x$.

22. *Hướng dẫn.* Gia tốc tại thời điểm t là $a(t) = s''(t) = t^2 + 3t + 3$.

23. Tiếp điểm $M(1\ ;\ 1)$, phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn. Ta có $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}$. Do đó, nếu gọi tiếp điểm là $M(a\ ;\ b)$ thì phương trình của tiếp tuyến tại M là $y = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-a}}(x-a) + b$. Để tiếp tuyến cắt trục hoành tại $P(3\ ;\ 0)$, điều kiện là

$$0 = \frac{-1}{2\sqrt{2-a}}(3-a) + b. \qquad (1)$$

Mặt khác vì M thuộc đồ thị của hàm số nên

$$b = \sqrt{2-a}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = 1$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = -\frac{1}{2}(x-3).$$

24. a) $\sqrt[3]{215} \approx 5{,}991$.

Hướng dẫn. Xét hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ và để ý rằng $6^3 = 216$. Chọn $x_0 = 216$ và $\Delta x = -1$.

b) $\cos 61^\circ \approx 0{,}485$.

Hướng dẫn. Chú ý rằng 61° đổi ra số đo rađian thì được $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}$.

Xét hàm số $y = \cos x$, ta cần tính $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}\right)$. Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ và $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên MẠC VĂN THIỆN
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Biên tập lần đầu : HOÀNG XUÂN VINH - ĐẶNG THỊ MINH THU
Biên tập tái bản : NGUYỄN XUÂN BÌNH
Biên tập kĩ thuật : NGUYỄN KIM TOÀN - TRẦN THANH HẰNG
Trình bày bìa : BÙI QUANG TUẤN
Sửa bản in : ĐẶNG MINH THU
Chế bản : CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 NÂNG CAO

Mã số: **NB103n6**

In 4.000 bản. (QĐ in số 01C DEIDCO), khổ 17 x 24 cm.
Đơn vị in: Công ti Cổ phần In và Dịch vụ Thừa Thiên Huế, 57 Bà Triệu - Phường Xuân Phú - Thành phố Huế - Tỉnh Thừa Thiên Huế - Việt Nam
Số ĐKXB: 01-2016/CXBIPH/805-964/GD
Số QĐXB: 1612/QĐ-GD, ngày 08 tháng 10 năm 2015
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2016.